5. $\mathbf{L}_p$ UZAYLARI

SORU 1: $\mu(X) = 1$ ve $0 < p < q \leq \infty$ olsun. Eğer f fonksiyonu L_q uzayına ait ise

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q$$

sağlanır. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 1: $\mu(X) = 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. $f \in L_q$ için $L_q \subset L_p$ olduğu bilindiğinden $f \in L_p$ elde edilir.

$r = \frac{q}{p} > 1$ olmak üzere $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ olacak şekilde $s > 1$ sayısını seçelim. $|f|^p \in L_r$ ve $1 \in L_s$ olduğundan Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left(\|f\|_p\right)^p &= \int |f|^p \, d\mu \\
&= \int |f|^p .1 d\mu \\
&\leq \left(\int |f|^{pr} \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int 1^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \left(\int |f|^{pr} \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\|f\|_q\right)^p
\end{aligned}$$

elde edilir. $q = \infty$ olması durumunda ise

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \left(\|f\|_\infty\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty = \|f\|_q$$

gerçeklenir.

SORU 2: $f \in L_1 \cap L_\infty$ olsun. Bu durumda

(a) $1 < p < \infty$ için $f \in L_p$ dir.

(b) Eğer $\mu(X) < \infty$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ sağlanır. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 2: (a) $M = \|f\|_\infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki

$$|f|^p = |f|^{p-1}|f| \le M^{p-1}|f|$$

eşitsizliği $1 < p < \infty$ için $f \in L_p$ olduğunu göstermektedir.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n > 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$ koşullarını sağlayan (p_n) pozitif reel sayılar dizisini dikkate alalım.

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_n} &= \left(\int |f|^{p_n}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p_n}} \\ &\le \|f\|_\infty [\mu(X)]^{\frac{1}{p_n}} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\limsup \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty$$

sağlanır. $0 < \epsilon < M$ olmak üzere

$$E = \{x \in X : |f(x)| \ge \|f\|_\infty - \epsilon\}$$

ölçülebilir kümesi için $\mu(E) > 0$ sağlanır. $(\|f\|_\infty - \epsilon)^{p_n} \chi_E \le |f|^{p_n}$ eşitsizliğinden

$$(\|f\|_\infty - \epsilon)[\mu(E)]^{\frac{1}{p_n}} \le \|f\|_{p_n}$$

ve $0 < \epsilon < M$ için

$$\|f\|_\infty - \epsilon \le \liminf \|f\|_{p_n}$$

sağlanır. Yani

$$\|f\|_{\infty} \leq \liminf \|f\|_{p_n}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\limsup \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_{\infty} \leq \liminf \|f\|_{p_n}$$

elde edilir. Bu ise $\lim\limits_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} = \|f\|_{\infty}$ ve istenilen elde edilir.

SORU 3: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı ve $\mu(X) = 1$ olsun. $f, g \in L_1$ olmak üzere hemen hemen her x için $f(x)\, g(x) \geq 1$ ise bu durumda

$$\left(\int f d\mu\right)\left(\int g d\mu\right) \geq 1$$

dir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 3: $\sqrt{f}$ ve $\sqrt{g}$ fonksiyonlarının L_2 uzayına ait oldukları ve hemen hemen her x için $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} \geq 1$ olduğu açıktır. Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 1 &= \int 1 d\mu \leq \int \sqrt{f}\sqrt{g} d\mu \\ &\leq \left(\int \left(\sqrt{f}\right)^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left(\sqrt{g}\right)^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olduğu görülür.