5.1 Ölçüsel Yakınsaklık

SORU 1: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer f' türevi $[a,b]$ aralığında düzgün sınırlı ise f' fonksiyonu Lebesgue anlamında integrallenebilirdir ve

$$\int_{[a,b]} f' d\lambda = f(b) - f(a)$$

dır. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 1: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferensiyellenebilir ve $\forall x \in [a,b]$ için $\left|f'(x)\right| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sabitini dikkate alalım.

$$f(x) = \begin{cases} f(a) + f'(a)(x-a) & ; \quad x < a \\ f(b) + f'(b)(x-b) & ; \quad x > b \end{cases}$$

olarak tanımlansın. f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve diferensiyellenebilir olduğu kabul edilebilir.$x \in \mathbb{R}$ için

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$$

ile tanımlı (f_n) diferensiyellenebilir fonksiyonlar dizisini dikkate alalım. Herbir $x \in \mathbb{R}$ için $f_n(x) \to f'(x)$ sağlanır. Ortalama değer teoremi kullanılırsa herbir $x \in \mathbb{R}$ için $|f_n(x)| \leq M$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Lebesgue yakınsaklık teoremi dikkate alınırsa, f' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir ve

$$\int_{[a,b]} f^{'} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \tag{1}$$

sağlanır. $u = x + \frac{1}{n}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(x)\,dx &= n\left\{ \int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx - \int_a^b f(x)\,dx \right\} \\
&= n\left\{ \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(u)\,du - \int_a^b f(x)\,dx \right\} \\
&= n\left\{ \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx \right\} \\
&= \frac{\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx}{\frac{1}{n}} - \frac{\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx}{\frac{1}{n}} \to f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

bulunur. (1) ifadesi yardımıyla istenilen elde edilir.

SORU 2: (f_n) ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. $\forall \epsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0$$

sağlansın. Bu durumda f fonksiyonu ölçülebilirdir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 2: (k_n) pozitif tamsayıların artan dizisi öyle ki $\forall k > k_n$ için

$$\mu^*\left(\left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) < 2^{-n}$$

sağlansın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$E_n = \left\{ x \in X : \left| f_{k_n}(x) - f(x) \right| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

kümesi ve $E = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} E_n$ tanımlansın. Bu durumda $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\mu^*(E) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu^*(E_n) \leq 2^{1-m}$$

sağlanıp $\mu^*(E) = 0$ olur. Ayrıca, eğer $x \notin E$ ise bu durumda bir $m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $x \notin \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} E_n$ ve $\forall n \geq m$ için

$$\left| f_{k_n}(x) - f(x) \right| < \frac{1}{n}$$

sağlanır. Böylece $x \notin E$ için $\lim f_{k_n}(x) = f(x)$ ve hemen hemen heryerde $f_{k_n} \to f$ sağlanır. Bu ise f fonksiyonunun ölçülebilir olmasını gerektirir.