

#### 4. Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  integrali hesaplanırken,  $P(x)$  ve  $Q(x)$  iki polinom olmak üzere  $P(x)$  polinomunun derecesi  $Q(x)$  polinomunun derecesinden büyük ise

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi ise payının derecesi paydasından küçük olan  $\frac{K(x)}{Q(x)}$  rasyonel fonksiyonunun integrali  $b^2 - 4ac < 0$  ve  $n > 1$  olmak üzere basit kesir denilen

$$\frac{A}{ax + b}, \frac{B}{(ax + b)^n}, \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}, \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

biçimindeki integrallerin toplamı şeklinde yazılarak daha kolay hesaplanır. **Örnek**

**3.**  $\int \frac{x + 4}{x^2 + x} dx$  integralini hesaplayalım. Öncelikle rasyonel ifadeyi basit kesirlere ayıralım.

$$\frac{x + 4}{x^2 + x} = \frac{x + 4}{x(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} \implies x + 4 = A(x + 1) + Bx$$

olduğundan  $x = 0$  için  $A = 4$  ve  $x = -1$  için  $B = -3$  bulunur.  $A$  ve  $B$  sabit sayıları integralde yerine yazılırsa

$$\int \frac{x + 4}{x^2 + x} dx = 4 \int \frac{1}{x} dx - 3 \int \frac{1}{x + 1} dx = 4 \ln |x| - 3 \ln |x + 1| + c$$

elde edilir.

**Örnek 4.**  $\int \frac{x}{(x - 1)(x + 1)^2} dx$  integralini hesaplayalım. Öncelikle rasyonel ifadeyi basit kesirlere ayıralım.

$$\frac{x}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

eşitliğinde payda eşitlendikten sonra  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{4}$  ve  $C = \frac{1}{2}$  olarak bulunur.

$A, B$  ve  $C$  sabitleri integralde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + c\end{aligned}$$

elde edilir.

## 5. Trigonometrik İntegraller

İntegrantı trigonometrik fonksiyonların cebirsel kombinasyonu olan integrallerdir.

a)  $a$  ve  $b$  reel sayı olmak üzere,

$$\int \sin ax \sin bxdx, \int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx,$$

tipindeki integraller:

$$\begin{aligned}\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \\ \sin ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] \\ \cos ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]\end{aligned}$$

formüllerini kullanılarak hesaplanır.

b)  $m$  ve  $n$  pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

tipindeki integralleri hesaplamak için  $m$  tek sayı ise  $t = \cos x$ ,  $n$  tek sayı ise  $t = \sin x$  değişken değiştirmesi yapılır.

Eğer,  $m$  ve  $n$  sayıları çift ise

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

özdeşlikleri yardımıyla kuvvetler azaltılır.

c)  $m$  ve  $n$  pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\int \tan^m x \sec^n x dx$$

tipindeki integraller  $m$  tek sayı ise  $t = \sec x$ ,  $n$  çift sayı ise  $t = \tan x$  değişken değiştirmesi yapılarak hesaplanır.

Ayrıca  $\int \cot^m x \csc^n x dx$  tipindeki integraller de benzer şekilde hesaplanır.

**Örnek 5.** Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

a)  $\int \sin 7x \sin 3x dx$  integralini hesaplamak için

$$\sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2} [\cos 4x - \cos 10x]$$

eşitliğinden yararlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} \int \sin 7x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int [\cos 4x - \cos 10x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 10x}{10} \right] + c \end{aligned}$$

elde edilir.

b)  $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$  integralini hesaplamak için  $\cos x = u$  seçilirse  $(-\sin x) dx = du$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin x \sin^2 x \cos^4 x dx \\ &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx \\ &= - \int (1 - u^2) u^4 du \\ &= - \int (u^4 - u^6) du \\ &= - \left( \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + c \\ &= - \left( \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} \right) + c\end{aligned}$$

bulunur.

c)  $\int \cos^2 x dx$  integralini hesaplamak için indirgeme formülü kullanılabilir ya da

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

eşitliğinden yararlanılarak

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + c$$

elde edilir.