BOOLEAN MATEMATİĞİ

Mustafa NUMANOĞLU

Boolean Matematiği

- Devre matematiğinin temeli, George BOOLE (1815 - 1864) tarafından 1847'de mantığın, matematiksel analizi üzerine yazmış olduğu tez ile ortaya çıkmıştır. Ancak bu düşünce, 1938 'den sonra Bell laboratuvarı tarafından yapılan roleli devrelerle telefon işletmelerinde uygulama alanı bulabilmiştir. Daha sonra da elektronik devrelerinin temeli olmuştur. Boolean matematiği basit bir matematiktir. Yalnız anahtar devrelerde çok önemli rol oynar. Lojik devre tasarımında ve lojik devrelerin basitleştirilmesinde kullanılır. "Boolean matematiği" sayısal devrelerin analiz ve tasarımını sağlayan matematiksel teoridir. Sayısal bilgisayar devreleri uygulamasında, ikili değişkenler üzerinde tanımlanan sayısal operasyonları gösterir ve ikili sayı sistemine dayanır.

Boolean İşlemleri

- Boolean matematiği sayısal sistemlerin analizinde ve anlaşılmasında kullanılan temel sistemdir. Sayısal olarak bir değişken veya fonksiyon iki değer alabilir. Bu değerler 1 veya 0 olacaktır. Boolean matematiğinde kullanılan bu değişkenler veya fonksiyonlar büyük harfler kullanılarak gösterilmiştir.
- Boolean matematiğinde, (**'**) işareti **TERSİ**, (**.**) işareti **VE**, (**+**) işareti **VEYA**, ($\oplus$) işareti de **ÖZEL VEYA** anlamına gelir.
- Değil veya tümleyen (komplement), boolean matematiğinde değişkenin üzerine çizilen bir çizgi ile gösterilir. Örneğin $\overline{A}$ ifadesi "A'nın değili veya A'nın komplementi" şeklinde okunur. Eğer A=1 ise $\overline{A}$ =0, A=0 ise $\overline{A}$ =1 olur. Tümleyen (komplement) veya değil için **A'** şeklinde yazım kullanılabilir. Bu işlem lojik 1'in lojik 0'a çevrilmesidir.

Boolean İşlemleri

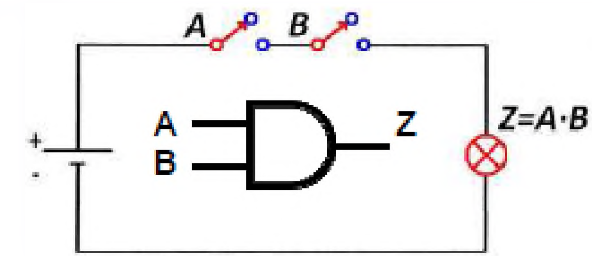
- A ve B girişlere uygulanan iki değişkeni gösterirse VE fonksiyonu Boolen ifadesi olarak A.B şeklinde yazılırken, VEYA fonksiyonu için A+B şeklinde yazılacaktır.
- Yandaki tabloda ise A ve B değişkenleri yerine 0 ve 1 değerleri kullanılmıştır.

VE	VEYA	DEĞİL
$0 . 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	$\overline{0} = 1$
$0 . 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\overline{1} = 0$
$1 . 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	
$1 . 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	

Boolean İşlemleri

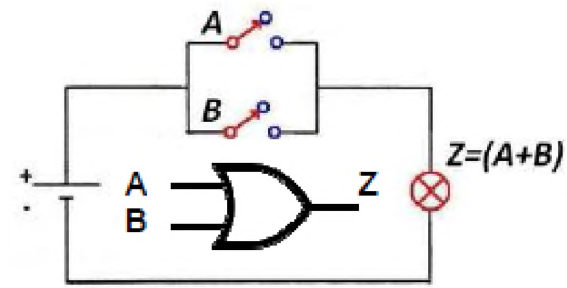
- **VE** İşleminin anahtar devrelerindeki karşılığı

VE
$0 \,.\, 0 = 0$
$0 \,.\, 1 = 0$
$1 \,.\, 0 = 0$
$1 \,.\, 1 = 1$



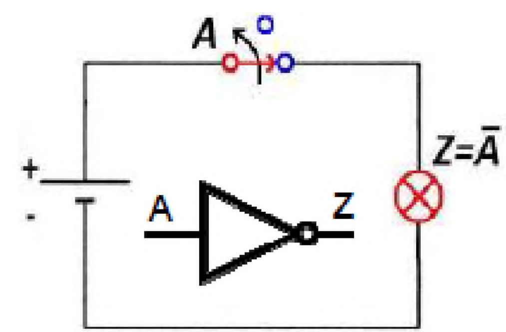
- **VEYA** İşleminin anahtar devrelerindeki karşılığı

VEYA
$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 1$



- **DEĞİL** (NOT) İşleminin anahtar devrelerindeki karşılığı

DEĞİL
$\overline{0} = 1$
$\overline{1} = 0$



Boolean İşlemleri

- Giriş uçlarının değişkenleri ile (A, B, C gibi) hesaplar yapılır. Bunlar çıkışın veya çıkışların, giriş değişkenlerine göre göstereceği durumları hesaplamak için kullanılır.

Formüller	0 Değeri Verildiğinde	1 Değeri Verildiğinde
$A \cdot 0 = 0$	$A = 0$ ise, $0 \cdot 0 = 0$	$A = 1$ ise, $1 \cdot 0 = 0$
$A \cdot 1 = A$	$A = 0$ ise, $0 \cdot 1 = 0$	$A = 1$ ise, $1 \cdot 1 = 1$
$A + 0 = A$	$A = 0$ ise, $0 + 0 = 0$	$A = 1$ ise, $1 + 0 = 1$
$A + 1 = A$	$A = 0$ ise, $0 + 1 = 1$	$A = 1$ ise, $1 + 1 = 1$
$A \cdot A = A$	$A = 0$ ise, $0 \cdot 0 = 0$	$A = 1$ ise, $1 \cdot 1 = 1$
$A + A = A$	$A = 0$ ise, $0 + 0 = 0$	$A = 1$ ise, $1 + 1 = 1$
$A \cdot A' = 0$	$A = 0$ ise, $0 \cdot 1 = 0$	$A = 1$ ise, $1 \cdot 0 = 0$
$A + A' = 1$	$A = 0$ ise, $0 + 1 = 1$	$A = 1$ ise, $1 + 0 = 1$
$(A')' = A$	$A = 0$ ise, $A' = 1$, $(A')' = 0$	$A = 1$ ise, $A' = 0$, $(A')' = 1$

Boolean Toplama ve Çarpma İlişkin Temel Kurallar

- Boolean toplamaya ilişkin temel kurallar:

  $0 + 0 = 0$

  $0 + 1 = 1$

  $1 + 0 = 1$

  $1 + 1 = 1$

- Sayısal devre uygulamalarında Boolean toplama VEYA fonksiyonu ile tanımlanır. VEYA işleminde A ve B gibi iki boolean değişkeni vardır. (A+B) şeklinde yazılır.

- Boolean çarpma işlemine ilişkin temel kurallar:

  $0 . 0 = 0$

  $0 . 1 = 0$

  $1 . 0 = 0$

  $1 . 1 = 1$

- Boolen çarpma işlemi ise VE fonksiyonu ile ifade edilir. VE işleminde iki boolean değişkeni vardır. A ve B girişleri, çıkışı (A.B) şeklinde yazılır.

Boolean Matematiğinin Kuralları

- Bir değişkenli Boolean matematiğinin kuralları:

(Kural 1) $0 + A = A$

(Kural 2) $1 + A = 1$

(Kural 3) $A + A = A$

(Kural 4) $A + \overline{A} = 1$

(Kural 5) $0 \, . \, A = 0$

(Kural 6) $1 \, . \, A = A$

(Kural 7) $A \, . \, A = A$

(Kural 8) $A \, . \, \overline{A} = 0$

(Kural 9) $A = A$

Boolean Matematiğinin Kuralları

- İki veya daha fazla değişkenli Boolean matematiğinin kuralları:

$A + B = B + A$	(Yer değiştirme kuralı)
$A \cdot B = B \cdot A$	(Yer değiştirme kuralı)
$A + (B + C) = (A + B) + C$	(Toplamada birleşme kuralı)
$A.(B.C) = (A.B).C$	(Çarpmada birleşme kuralı)
$A.(B+C) = A.B + A.C$	(Dağılma kuralı)
$A + B.C = (A + B).(A + C)$	(Dağılma kuralı)
$A + A.B = A$	(Gereksizlik kuralı)
$A.(A + B) = A$	(Gereksizlik kuralı)

Boolean Kanunları - Yer Değiştirme Kanunu

- İki girişli bir **VEYA** kapısının girişlerine uygulanan değişkenler yer değişirse çıkış değeri değişmez.
- **A+B = B+A**

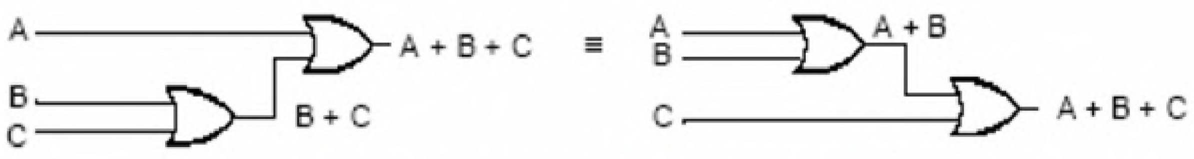
Yer değiştirme kanunun VEYA kapısı uygulaması

- İki girişli bir **VE** kapısının girişlerine uygulanan değişkenler yer değişirse çıkış değeri değişmez.
- **A.B = B.A**

Yer değiştirme kanunun VE kapısı uygulaması

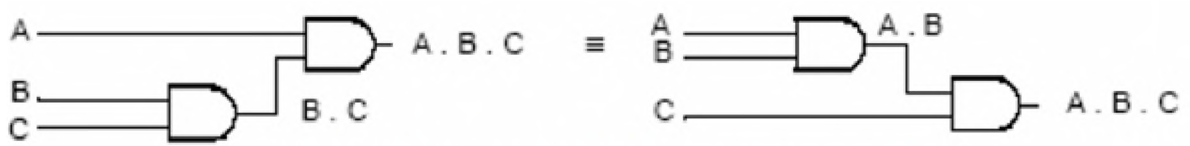
Boolean Kanunları - Birleşme Kanunu

- Bir **VEYA** kapısının girişlerine uygulanan değişkenlerin gruplandırılmaları değişirse çıkış değeri değişmeyecektir.
- **(A+B)+C = A+(B+C)** şeklinde de yazılabilir.



Birleşme kanununun VEYA kapısı uygulaması

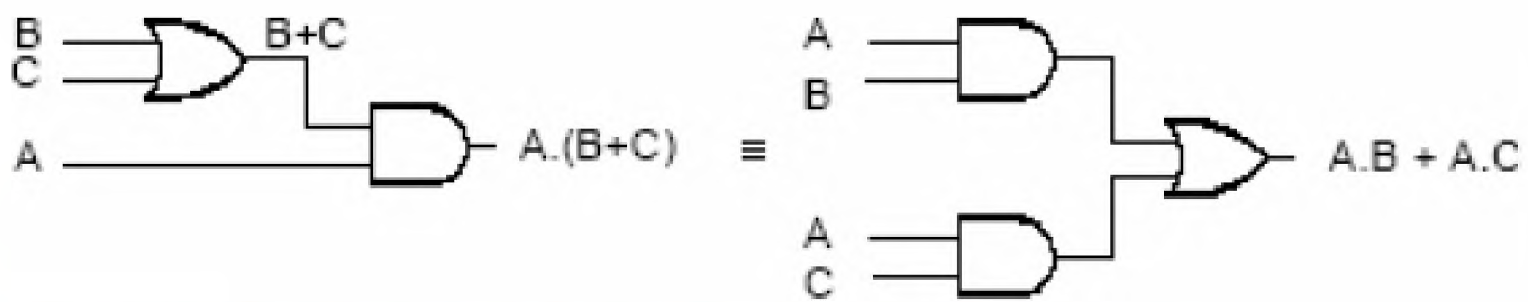
- Bir **VE** kapısının girişlerine uygulanan değişkenlerin gruplandırılmaları değişirse çıkış değeri değişmeyecektir.
- **(A.B).C = A.(B.C)** şeklinde de yazılabilir.



Birleşme kanununun VE kapısı uygulaması

Boolean Kanunları - Dağılma Kanunu

- Boolean işlemlerinde de çarpmanın (**VE**) toplama (**VEYA**) üzerine dağılması aşağıdaki gibidir.
- **A.(B+C) = A.B+A.C**
- **A+(B.C) = (A+B).(A+C)**



Dağılma kanununun mantık kapıları ile uygulanması

Boolean Matematiği Kuralları

1) $A = 0$ ise $\overline{A} = 1$ veya $A = 1$ ise $\overline{A} = 0$'dir.

2) $0.0 = 0$

3) $1+1 = 1$ veya $(A+A = A)$

4) $0+0 = 0$

5) $1 . 1 = 1$ veya $(A.A = A)$

6) $1. 0 = 0$ veya $(A.\overline{A} = 0)$

7) $1+ 0 = 1$ veya $(A+\overline{A} = 1)$

Yutma kuralı

1) $A+A.B = A$

2) $A.(A+B) = A$

VE (AND) kuralı

1) $0.A = 0$

2) $1.A = A$

VEYA (OR) kuralı

1) $1+A = 1$

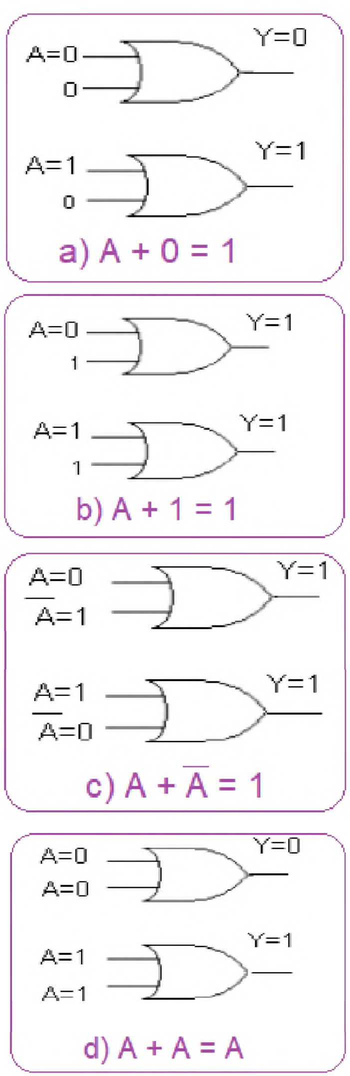
2) $0+A = A$

Boolean Matematiği Kuralları

1.a-	A	$+$	0	$=$	A
b-	A	$+$	1	$=$	1
c-	A	$+$	$\overline{A}$	$=$	1
d-	A	$+$	A	$=$	A
2.a-	A	$.$	0	$=$	0
b-	A	$.$	1	$=$	A
c-	A	$.$	$\overline{A}$	$=$	0
d-	A	$.$	A	$=$	A
3.	$\overline{\overline{A}}$	$=$	A		
4.	A	$+$	$A.B$	$=$	A
5.	A	$+$	$\overline{A}.B$	$=$	$A+B$
6.	$(A+B).(A+C)=A+B.C$				

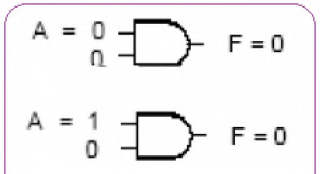
Boolean Matematiği Kuralları - VEYA Özdeşlikleri (Kural 1)

- **a)** Bir VEYA kapısının girişlerinden biri "0" ise çıkış ifadesi A' nın durumuna bağlıdır. Eğer A=0 ise çıkış "0", A=1 ise çıkış "1" olur.
- **b)** Bir VEYA kapısının girişlerinden biri "1" ise, A' nın durumu ne olursa olsun çıkış daima "1" olur.
- **c)** Bir VEYA kapısının girişlerine değişkenin değili ile kendisi uygulanırsa çıkış A'nın durumu ne olursa olsun daima "1" olur.
- **d)** Bir VEYA kapısının her iki girişine aynı değişken uygulanırsa çıkış A'nın durumuna bağlıdır. Eğer A=0 ise çıkış "0", A=1 ise çıkış "1" olur.

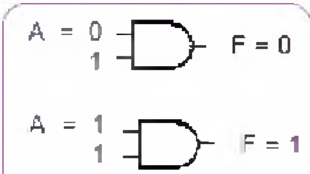


Boolean Matematiği Kuralları - VE Özdeşlikleri (Kural 2)

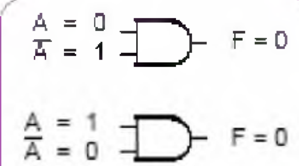
- **a)** Bir VE kapısının girişlerinden biri "0" ise, A' nın durumu ne olursa olsun çıkış daima "0"olur.
- **b)** Bir VE kapısının girişlerinden biri "1" ise çıkış ifadesi A' nın durumuna bağlıdır. Eğer A=0 ise çıkış "0", A=1 ise çıkış "1" olur.
- **c)** Bir VE kapısının girişlerine değişkenin değili (tümleyeni) ile kendisi uygulanırsa çıkış A'nın durumu ne olursa olsun daima "0" olur.
- **d)** Bir VE kapısının her iki girişine aynı değişken uygulanırsa çıkış A'nın durumuna bağlıdır. Eğer A=0 ise çıkış "0", A=1 ise çıkış "1" olur.



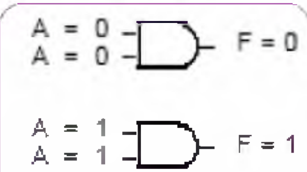
a) $A . 0 = 0$



b) $A . 1 = A$



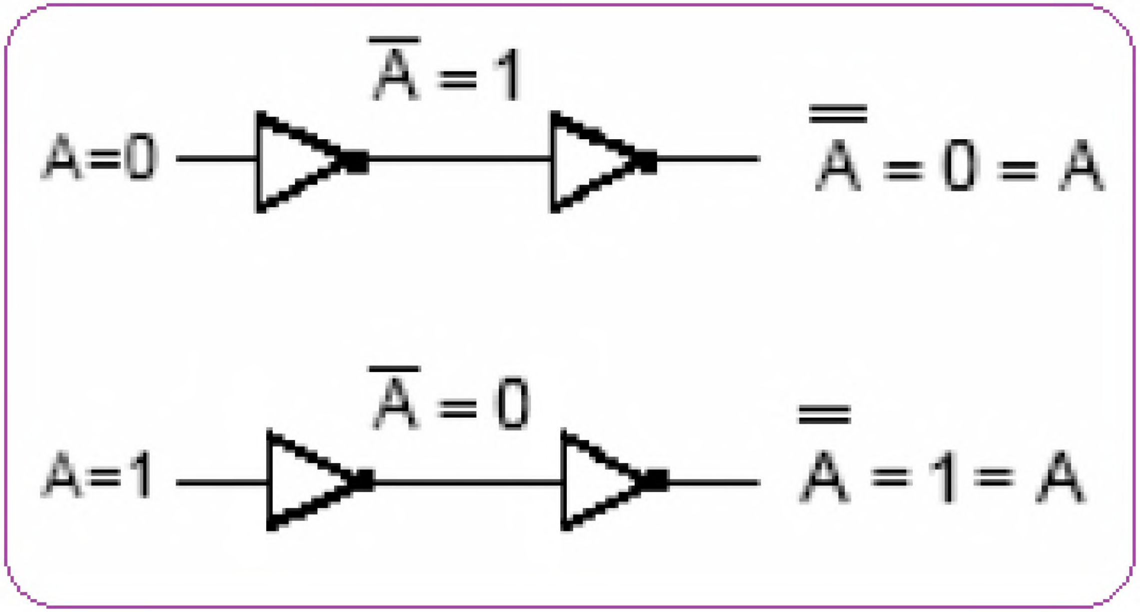
c) $A . \overline{A} = 0$



d) $A . A = A$

Çift Tersleme Kuralı (Kural 3)

- Bir Lojik ifadenin veya değişkenin iki defa değili alınırsa (terslenirse) lojik ifadenin veya değişkenin aslı elde edilir.



Yutma Kuralı (Kural 4)

- Bu kuralı dağılma kuralı ve VEYA, VE özdeşlikleri yardımı ile açıklayalım. Eğer ifadeyi A ortak parantezine alırsak aşağıdaki dönüşüm sağlanmış olur.

$$\begin{aligned} A + A . B &= A (1 + B) \\ &= A .1 \\ &= A \end{aligned}$$

- Giriş değişkenlerinin durumuna bağlı olarak çıkış ifadesi yazılabilir. A+A.B çıkışının A giriş ifadesine eşit olduğu yandaki doğruluk tablosundan görülebilir.

A	B	A.B	A + A.B
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Kural 5

- Bu kuralı yutma, VE, VEYA özdeşlikleri, çift tersleme kuralları yardımı ile açıklayalım.

$A + \overline{A}.B = (A + A.B) + \overline{A}.B$	*Yutma kuralı*
$= (A.A + A.B) + \overline{A}.B$	*VE özdeşliği*
$= A.A + A.B + A.\overline{A} + \overline{A}.B$	*Çift tersleme*
$= (A + \overline{A}).(A + B)$	*VEYA özdeşliği*
$= 1.(A + B)$	*VE özdeşliği*
$= A + B$	

A	B	$\overline{A}.B$	$A + \overline{A}.B$	A+B
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

- Giriş değişkenlerinin durumuna bağlı olarak çıkış ifadesi yazılabilir. A+ A'.B çıkışının A+B giriş ifadesine eşit olduğu yandaki doğruluk tablosundan görülebilir.

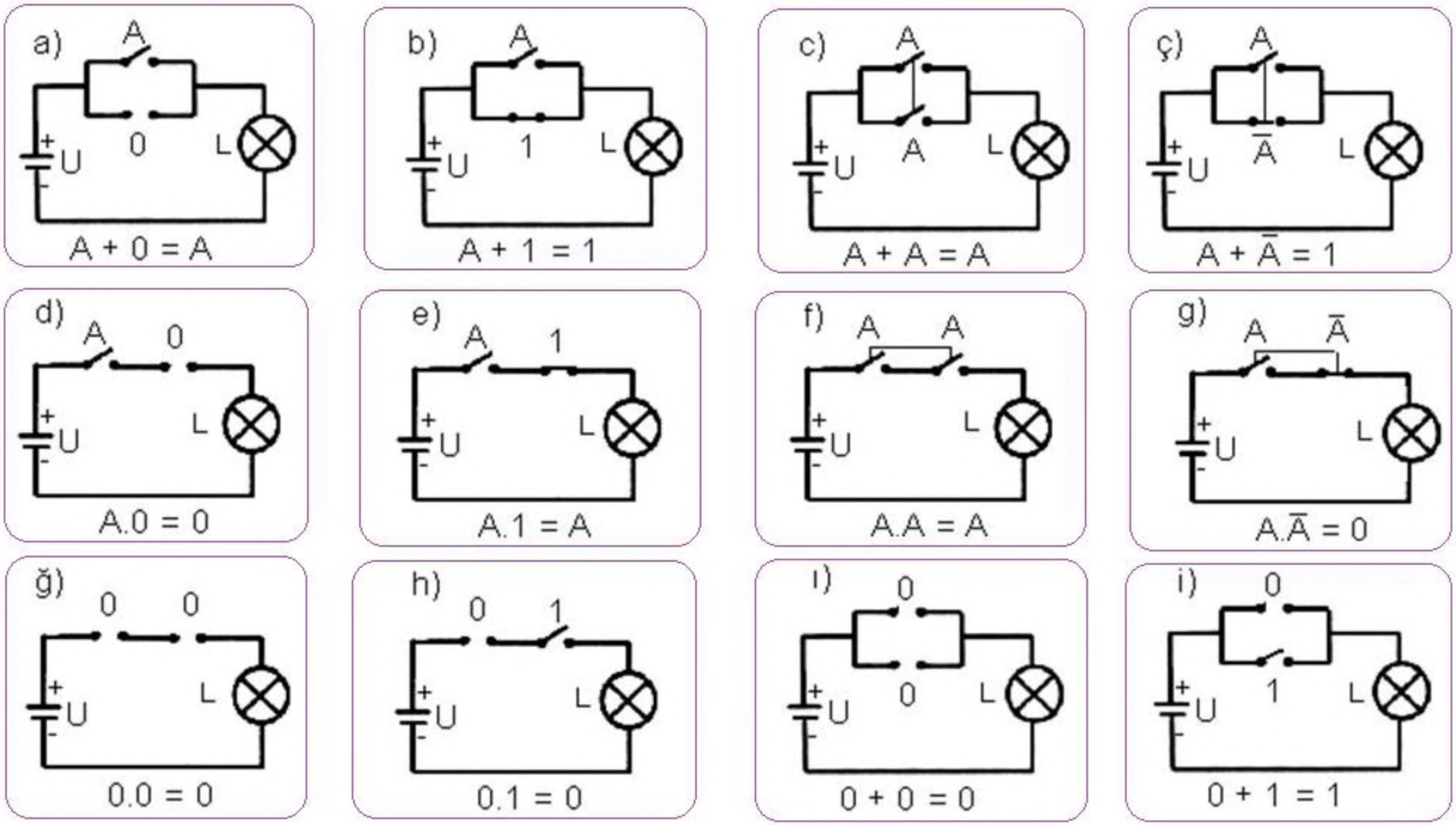
Kural 6

- Bu kuralı dağılma kuralı, VE özdeşliği, VEYA özdeşliği yardımı ile açıklayalım:

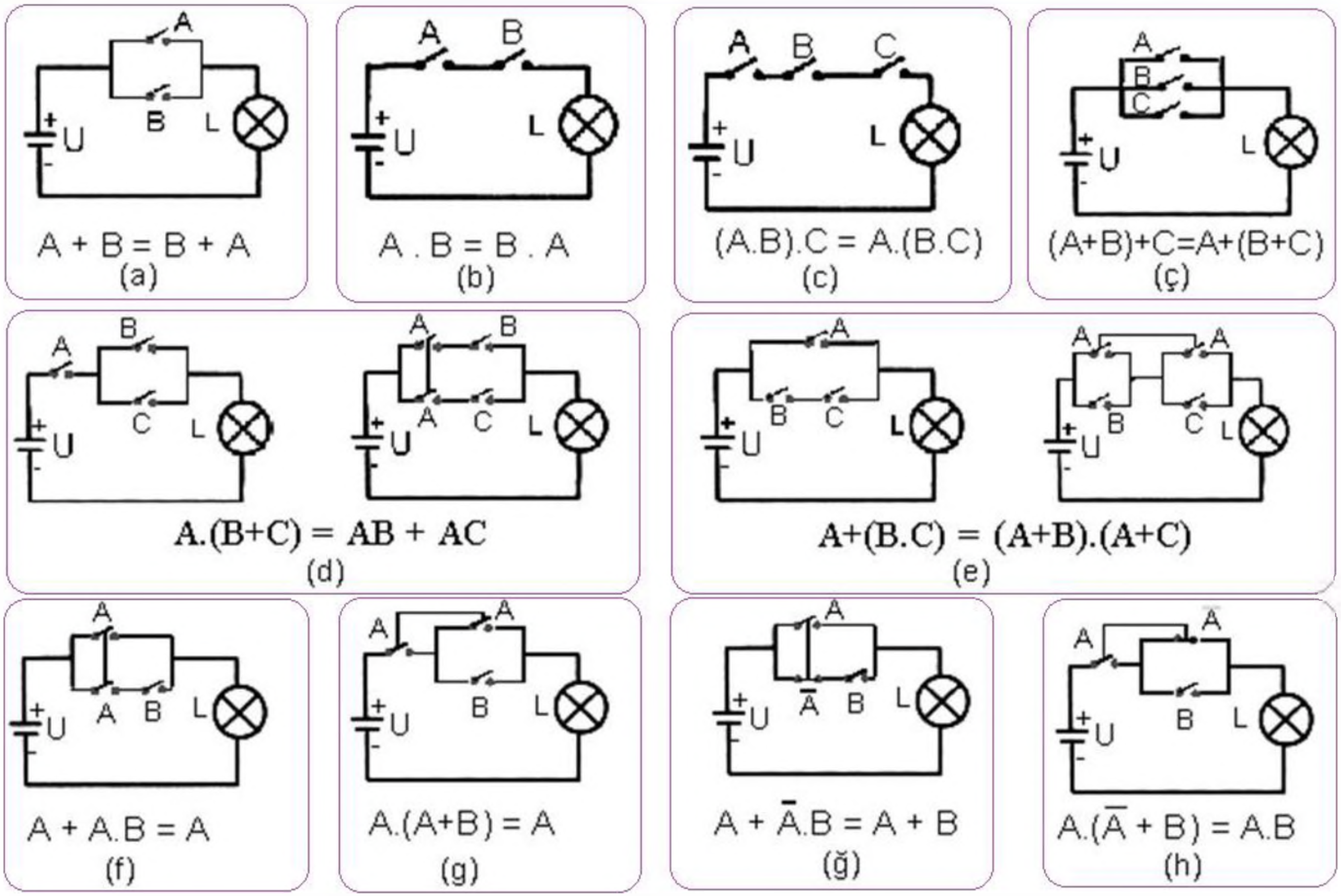
$$
\begin{aligned}
(A+B).(A+C) &= A.A + A.C + A.B + B.C \\
&= A + A.C + A.B + B.C \\
&= A.(1 + C) + A.B + B.C \\
&= A.1 + A.B + B.C \\
&= A.(1 + B) + B.C \\
&= A + B.C
\end{aligned}
$$

A	B	C	A +B	A+C	(A + B).(A + C)	B.C	A + B.C
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

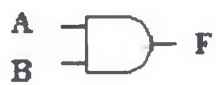
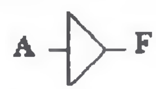
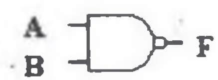
Boolean Özdeşliklerinin Elektrik Devreleriyle Gösterilişi



Boolean Kurallarının Elektrik Devreleriyle Gösterilişi



Kapıların Sembol ve İşlevleri

GATE	SEMBOLÜ	İŞLEVİ
AND		$F = A.B$
OR		$F = A + B$
İNVERTER-NOT		$F = \bar{A}$
BUFFER		$F = A$
NAND		$F = \overline{A.B}$
NOR		$F = \bar{A} + \bar{B}$
EX-OR		$F = \bar{A}B + A\bar{B}$ veya $F = A \oplus B$
EX-NOR		$F = A.B + \overline{A.B}$

De Morgan Teoremleri

- DeMorgan teoremleri Boolean matematiğinin en önemli teoremleridir. İki değişken için DeMorgan teoremleri aşağıdaki gibi yazılır.

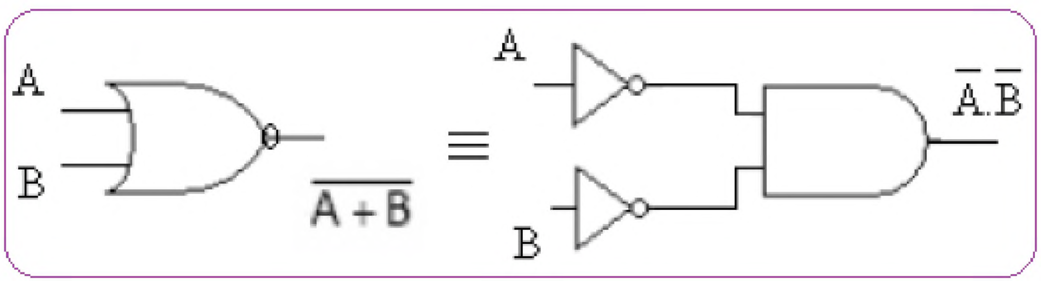
Teorem-1	$\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$
Teorem-2	$\overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$

- "Boolean matematiğinde çarpma işleminin komplementeri toplama işlemine eşittir." 1. Teoreme göre VE kapısıyla bağlı bir devrenin olumsuzu, devrenin giriş değerlerinin olumsuzlarının VEYA'sı şeklinde yazılabilir. Diğer bir ifadeyle A, B gibi iki değişkenin VEDEĞİL kapısına uygulanması ile elde edilen ifade bu iki değişkenin değilinin alınmasından sonra VEYA'lanması ile elde edilen ifadeye eşittir.

De Morgan Teoremleri

- Boolean işlemlerinde toplama işleminin parantez $(\overline{A+B})$ değilini açarsak içerideki ifadenin işlemi toplama (+) ise çarpma (.) olur $(\overline{A}.\overline{B})$.

- Teorem-1'e ait kapı eşitliği ve doğruluk tablosu:



A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	0	1	1
0	0	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

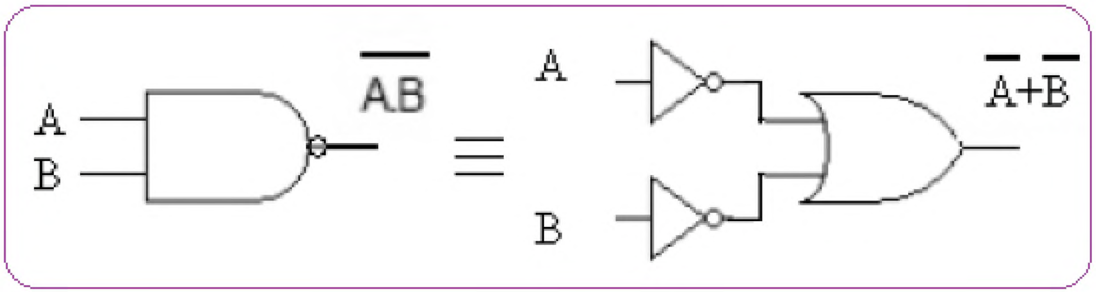
- "Boolean matematiğinde toplama işleminin komplementeri çarpma işlemine eşittir."

De Morgan Teoremleri

- 2. Teoreme göre A, B gibi iki değişkenin VEYA DEĞİL kapısına uygulanması ile elde edilen ifade bu iki değişkenin değilinin alınmasından sonra; girişler VE lojik işlemi ile elde edilen ifadeye eşittir. Diğer bir ifadeyle VEYA kapısı ile bağlı girişlerin olumsuzu, girişlerin olumsuzlarının VE kapısıyla bağlanmış halinde yazılabilir.
- Boolean işlemlerinde çarpma işleminin parantez $(\overline{A.B})$ değilini açarsak içerideki ifadenin işlemi çarpma (.) ise toplama (+) işlemine dönüşür $(\overline{A}+\overline{B})$.

De Morgan Teoremleri

- Teorem-2'e ait kapı eşitliği ve doğruluk tablosu:



A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	0	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

- De Morgan teoremi ikiden fazla değişken için de geçerlidir. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

a) $\overline{XYZ} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$

b) $\overline{WXYZ} = \overline{W} + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$

c) $\overline{X + Y + Z} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$

d) $\overline{W + Y + X + Z} = \overline{W}\;\overline{Y}\;\overline{X}\;\overline{Z}$

De Morgan Teoremleri - Örnekler

- **Örnek**: A.(A.B+C) işlemini sadeleştirelim.

  = A.A.B + A.C (A.A=A)

  = A.B + A.C (A parantezine alınırsa)

  = A.(B+C) olur.

- **Örnek**: $B.\overline{A} + \overline{A}.\overline{B}+A.B$ işlemini sadeleştirelim.

  $= B.(\overline{A}+A)+\overline{A}.\overline{B}$

  $= 1.B+\overline{A}.\overline{B}$

  $= B+\overline{A}.\overline{B}$

  $= B+\overline{A}$

De Morgan Teoremleri - Örnekler

- **Örnek:** AB+A(B+C)+B(B+C) fonksiyonunu Boolean kurallarını kullanarak en basitleştirelim.

  Y=AB + A(B + C) + B(B + C)

  = AB + AB + AC + BB + BC (BB=B) kanunu uygulanırsa

  =AB + AB + AC + B + BC (AB+AB=AB) kuralı uygulanırsa

  =AB + AC + B + BC B çarpan parantezine alınırsa

  =AB + AC + B(1+ C) (1+A = 1) kuralından Birinci ve

  =AB + AC + B.1 üçüncü terim B ortak parantezine alınırsa

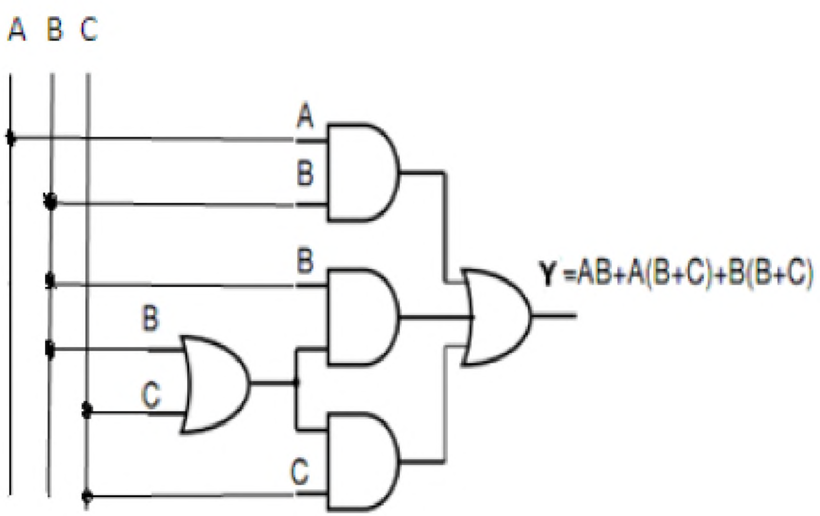
  =AC + B(A + 1) (1+A = 1) kuralı uygulanırsa

  =AC + B.1

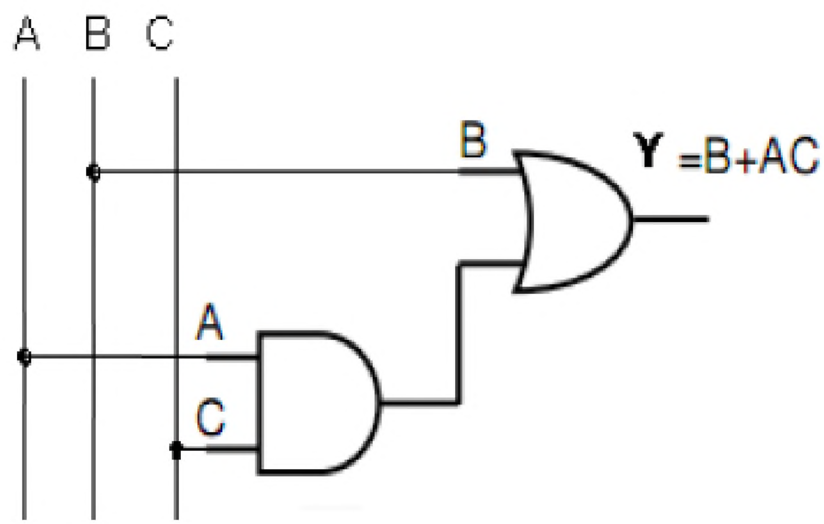
  =**AC+B** şeklinde olur.

De Morgan Teoremleri - Örnekler

İfadenin sadeleşmeden çizilişi



İfade sadeleştikten sonraki hâli



De Morgan Teoremleri - Örnekler

- ***ÖRNEK 1:*** *Aşağıdaki* fonksiyonu boolean kanunlarını kullanarak en basit hale indirgeyin.

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

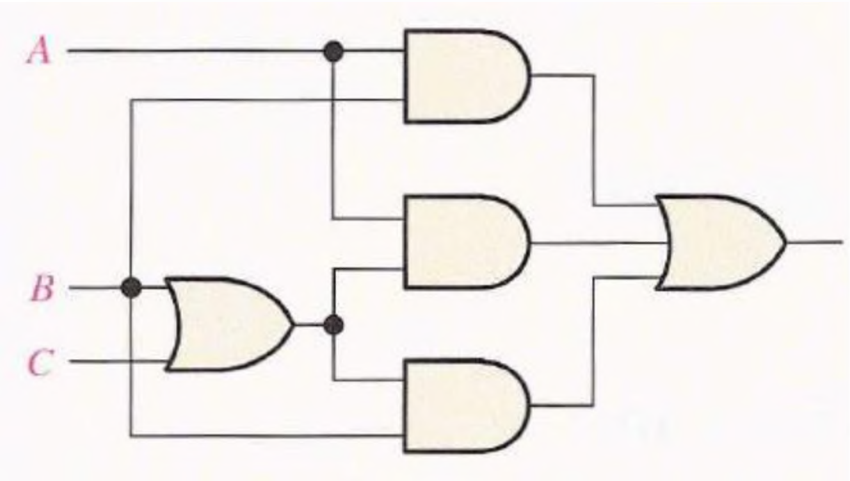
$$= \underbrace{AB + AB}_{AB} + AC + BB + BC$$

$$= AB + AC + \underbrace{B + BC}_{B}$$

$$= \underbrace{B + BA}_{B} + AC = B + AC$$

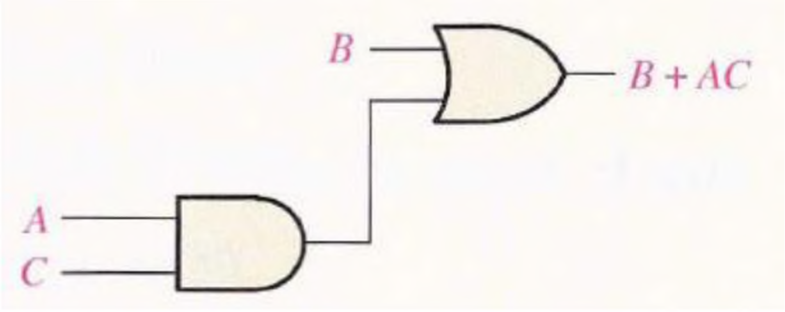
De Morgan Teoremleri - Örnekler

İfadenin sadeleşmeden çizilişi



$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

İfade sadeleştikten sonraki hâli



Karnough Haritası

- Boolean matematiğinde yapılan sadeleştirmeleri karno haritasında daha kolay ve daha güvenilir yapmak mümkündür. Karno haritası, sadeleştirme ve dijital devre tasarımında kullanılmaktadır. Değişken sayısına göre karno haritası düzenlenir. Örneğin 2 değişken (A B), 5 değişken (A B C D E) vb. Karno haritası en fazla 6 değişkenli eşitlikleri sadeleştirmede kullanılır.
- Karno haritasında kaç kutu olacağı 2^n (2 üzeri n) formülü ile bulunur. n değişken adedini belirtir.
- Değişken sayısına göre oluşturulan tabloda değişkenin değili olan yerlere 0, değişkenin kendisi olan yerlere de 1 konur.

Değişken Sayısına Göre Karno Hazırlama

- **2 Değişkenli Karno Haritası:**
- Örneğin $y = A.B + A.B'$ gibi (A ve B) değişkenlerinden oluşan iki değişkenli haritadır. Burada (A , B) $2^2 = 4$ kutudan oluşan karno haritası çizilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta A ve B ye ait hücrelerin doğru şekilde tespit edilmesidir.
- Bu tablolarda A ve B'nin yerleri değiştirilerek de yazılabilir. O zaman hücrelerin içi de değişecektir.

B \ A	$\bar{A}$	A
$\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
B	$\bar{A}B$	AB

	1. Sutun	2. Sutun	
B \ A	0	1	
0	0	2	1. Satır
1	1	3	2. Satır

2 Değişkenli Karno Haritası

A. SOP: -

A \ B	$\overline{B}$ 0	B 1
$\overline{A}$ 0	$\overline{A}.\overline{B}$	$\overline{A}.B$
A 1	$A.\overline{B}$	$A.B$

B. POS: -

A \ B	B 0	$\overline{B}$ 1
A 0	$A+B$	$A+\overline{B}$
$\overline{A}$ 1	$\overline{A}+B$	$\overline{A}+\overline{B}$

3 Değişkenli Karno Haritası

- Örneğin $y = A.B.C + A'.B'.C + B.C'$ şeklindeki fonksiyonlar 3 değişkenli fonksiyonlardır ve bu tür fonksiyonları indirgemek için aşağıdaki karno haritası kullanılır.
- (A, B, C) gibi üç değişken olduğundan $2^3 = 8$ kutu çizilir.
- Aşağıdaki her iki şekilde dikkat edilecek nokta AB nin bulunduğu satırda 0 ve 1 lerin yazılış şekli 00,01,10,11 değil de 00,01,11,10 şeklindedir. C ise dikeyde 0 ve 1 olarak yazılır. Bu yazılış biçimi 4 değişkenli için de geçerlidir.

C \ AB	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$	$\overline{A}.B.\overline{C}$	$A.B.\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$
C	$\overline{A}.\overline{B}.C$	$\overline{A}.B.C$	$A.B.C$	$A.\overline{B}.C$

y

Yazılış şekline dikkat

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

3 Değişkenli Karno Haritası

A. SOP: -

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$ 00	$\bar{B}C$ 01	BC 11	$B\bar{C}$ 10
$\bar{A}$ 0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 0	$\bar{A}\bar{B}C$ 1	$\bar{A}BC$ 3	$\bar{A}B\bar{C}$ 2
A 1	$A\bar{B}\bar{C}$ 4	$A\bar{B}C$ 5	ABC 7	$AB\bar{C}$ 6

AB \ C	$\bar{C}$ 0	C 1
$\bar{A}\bar{B}$ 00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 0	$\bar{A}\bar{B}C$ 1
$\bar{A}B$ 01	$\bar{A}B\bar{C}$ 2	$\bar{A}BC$ 3
AB 11	$AB\bar{C}$ 6	ABC 7
$A\bar{B}$ 10	$A\bar{B}\bar{C}$ 4	$A\bar{B}C$ 5

B. POS: -

A \ B+C	$B+C$ 00	$B+\bar{C}$ 01	$\bar{B}+\bar{C}$ 11	$\bar{B}+C$ 10
A 0	$A+B+C$ 0	$A+B+\bar{C}$ 1	$A+\bar{B}+\bar{C}$ 3	$A+\bar{B}+C$ 2
$\bar{A}$ 1	$\bar{A}+B+C$ 4	$\bar{A}+B+\bar{C}$ 5	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ 7	$\bar{A}+\bar{B}+C$ 6

A+B \ C	C 0	$\bar{C}$ 1
$A+B$ 0 0	$A+B+C$ 0	$A+B+\bar{C}$ 1
$A+\bar{B}$ 0 1	$A+\bar{B}+C$ 2	$A+\bar{B}+\bar{C}$ 3
$\bar{A}+\bar{B}$ 1 1	$\bar{A}+\bar{B}+C$ 6	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ 7
$\bar{A}+B$ 1 0	$\bar{A}+B+C$ 4	$\bar{A}+B+\bar{C}$ 5

4 Değişkenli Karno Haritası

- Örneğin y = A'.B.C'.D + A'.B'.C.D' + A'.B'.C.D şeklindeki fonksiyonlar 4 değişkenli fonksiyonlardır ve bu tür fonksiyonları indirgemek için aşağıdaki karno haritası kullanılır. (A, B, C, D) değişkenleri için $2^4 = 16$ kutu çizilir.

C.D \ A.B	$\overline{A}.\overline{B}$ 00	$\overline{A}.B$ 01	$A.B$ 11	$A.\overline{B}$ 10
$\overline{C}.\overline{D}$ 00	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$	$\overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D}$	$A.B.\overline{C}.\overline{D}$	$A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$
$\overline{C}.D$ 01	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D$	$\overline{A}.B.\overline{C}.D$	$A.B.\overline{C}.D$	$\overline{A}.B.C.\overline{D}$
$C.D$ 11	$\overline{A}.\overline{B}.C.D$	$\overline{A}.B.C.D$	$A.B.C.D$	$A.\overline{B}.C.D$
$C.\overline{D}$ 10	$\overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D}$	$A.\overline{B}.\overline{C}.D$	$A.B.C.\overline{D}$	$A.\overline{B}.C.\overline{D}$

y

Yazılış şekline dikkat

CD \ AB	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	4	12	8
0 1	1	5	13	9
1 1	3	7	15	11
1 0	2	6	14	10

4 Değişkenli Karno Haritası

A. SOP: -

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}D$ 01	CD 11	$C\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ 0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$ 1	$\overline{A}\,\overline{B}CD$ 3	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$ 2
$\overline{A}B$ 01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$ 4	$\overline{A}B\overline{C}D$ 5	$\overline{A}BCD$ 7	$\overline{A}BC\overline{D}$ 6
AB 11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$ 12	$AB\overline{C}D$ 13	$ABCD$ 15	$ABC\overline{D}$ 14
$A\overline{B}$ 10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ 8	$A\overline{B}\,\overline{C}D$ 9	$A\overline{B}CD$ 11	$A\overline{B}C\overline{D}$ 10

B. POS: -

A+B \ C+D	$C+D$ 00	$C+\overline{D}$ 01	$\overline{C}+\overline{D}$ 11	$\overline{C}+D$ 10
$A+B$ 00	$A+B+C+D$ 0	$A+B+C+\overline{D}$ 1	$A+B+\overline{C}+\overline{D}$ 3	$A+B+\overline{C}+D$ 2
$A+\overline{B}$ 01	$A+\overline{B}+C+D$ 4	$A+\overline{B}+C+\overline{D}$ 5	$A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$ 7	$A+\overline{B}+\overline{C}+D$ 6
$\overline{A}+\overline{B}$ 11	$\overline{A}+\overline{B}+C+D$ 12	$\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}$ 13	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$ 15	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D$ 14
$\overline{A}+B$ 10	$\overline{A}+B+C+D$ 8	$\overline{A}+B+C+\overline{D}$ 9	$\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$ 11	$\overline{A}+B+\overline{C}+D$ 10

5 Değişkenli Karno Haritası

- Örneğin y = A.B.C'.D.E + A'.B'.C.D'.E + A.B.C.D.E şeklindeki fonksiyonlar 5 değişkenli fonksiyonlardır ve bu tür fonksiyonları indirgemek için aşağıdaki karno haritası kullanılır. (A, B, C, D, E) değişkenleri için $2^5 = 32$ kutu çizilmelidir.

DE \ ABC	C'				C			
	A'B'	A'B	AB	AB'	AB'	AB	A'B	A'B'
D'E	A'B'C'D'E	A'BC'D'E	ABC'D'E	AB'CD'E	AB'CD'E	ABCD'E	A'BCD'E	A'B'CD'E
D'E	A'B'C'D'E	A'BC'D'E	ABC'D'E	AB'C'D'E	AB'CD'E	ABCD'E	A'BCD'E	A'B'CD'E
DE	A'B'C'DE	A'BC'DE	ABC'DE	AB'C'DE	AB'CDE	ABCDE	A'BCDE	A'B'CDE
DE	A'B'C'DE	A'BC'DE	ABC'DE	AB'C'DE	AB'CDE	ABCDE	A'BCDE	A'B'CDE

5 Değişkenli Karno Haritası

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

6 Değişkenli Karno Haritası

- Örneğin y = A.B.C'.D.E.F + A'.B'.C.D'.E.F + A.B.C.D.E.F şeklindeki fonksiyonlar 6 değişkenli fonksiyonlardır ve bu tür fonksiyonları indirgemek için aşağıdaki karno haritası kullanılır. (A, B, C, D, E, F) değişkenleri için $2^6 = 64$ kutu çizilmelidir.

	ABC / DEF	C'				C			
		A'B'	A'B	AB	AB'	AB'	AB	A'B	A'B'
F'	D'E'	A'B'C'D'E'F'	A'BC'D'E'F'	ABC'D'E'F'	AB'CD'E'F'	AB'CD'E'F'	ABCD'E'F'	A'BCD'E'F'	A'B'CD'E'F'
	D'E	A'B'C'D'EF'	A'BC'D'EF'	ABC'D'EF'	AB'C'D'EF'	AB'CD'EF'	ABCD'EF'	A'BCD'EF'	A'B'CD'EF'
	DE	A'B'C'DEF'	A'BC'DEF'	ABC'DEF'	AB'C'DEF'	AB'CDEF'	ABCDEF'	A'BCDEF'	A'B'CDEF'
	DE'	A'B'C'DE'F'	A'BC'DE'F'	ABC'DE'F'	AB'C'DE'F'	AB'CDE'F'	ABCDE'F'	A'BCDE'F'	A'B'CDE'F'
F	DE'	A'B'C'D'E'F	A'BC'D'E'F	ABC'D'E'F	AB'CD'E'F	AB'CD'E'F	ABCD'E'F	A'BCD'E'F	A'B'CD'E'F
	DE	A'B'C'D'EF	A'BC'D'EF	ABC'D'EF	AB'C'D'EF	AB'CD'EF	ABCD'EF	A'BCD'EF	A'B'CD'EF
	D'E	A'B'C'DEF	A'BC'DEF	ABC'DEF	AB'C'DEF	AB'CDEF	ABCDEF	A'BCDEF	A'B'CDEF
	D'E'	A'B'C'DE'F	A'BC'DE'F	ABC'DE'F	AB'C'DE'F	AB'CDE'F	ABCDE'F	A'BCDE'F	A'B'CDE'F

- **Kural 1:** İndirgeyeceğimiz fonksiyonun değişken sayısına göre karno haritası kullanılır.

Fonksiyonun Karnough Haritasına Yerleştirilmesi

- Fonksiyonun haritaya yerleştirme işlemi belli bir mantık dâhilinde yapılır. Fonksiyonun doğruluk tablosu ile karno haritası arasında doğrudan bir ilişki vardır.
- Doğruluk tablosu düzgün bir şekilde çıkarılmış bir fonksiyonu karnoya yerleştirmek çok kolaydır.
- **Örnek 11.1**: y = A.B.C' + A'.B'.C + B.C fonksiyonunu karno haritasına yerleştirelim.
- Bir ifadeyi karnoya yerleştirmeden önce doğruluk tablosu hazırlanmalıdır. Bu ifade üç değişkenli olduğundan (A,B,C) = 2^3 = 8 kutu çizilmelidir (**Kural 1)**.
- **Kural 2:** İndirgeyeceğimiz fonksiyon karno haritasına yerleştirilir.

Fonksiyonun Karnough Haritasına Yerleştirilmesi

- Ancak önce tablo hazırlanmalıdır. İfadeyi kısım kısım ele alırsak
- 1. İfade **A.B.C' = 1** olmalıdır.
- 2. İfade **A'.B'.C = 1** olmalıdır.
- 3. İfade **B.C = 1** olmalıdır.
- Tabloda Y çıkış ifadesine 4 farklı fonksiyon çıkmıştır. Bunun nedeni (B.C) ifadesine hem (A'.B.C) ifadesi hem de (A.B.C) ifadesi karşılık gelmesidir. Bu nedenle örnekte 3 olan ifade karnoya aktarılırken 4 adet (1) olarak aktarılacaktır.

Değişkenler			Çıkış	
A	B	C	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	1	→ A'.B'.C
0	1	0	0	
0	1	1	1	→ A'.B.C ←
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	→ A.B.C'
1	1	1	1	→ A.B.C ←

Fonksiyonun Karnough Haritasına Yerleştirilmesi

- Bu durumda karno diyagramına Y çıkış ifadesi aşağıdaki gibi yerleştirilecektir.

	Değişkenler			Çıkış ifadesi
	A	B	C	y
	0	0	0	0
A'.B'.C →	0	0	1	1
	0	1	0	0
A'.B.C →	0	1	1	1
	1	0	0	0
	1	0	1	0
A.B.C' →	1	1	0	1
A.B.C →	1	1	1	1

y C \ AB	0 0	0 1	1 1	1 0
0			1	
1	1	1	1	

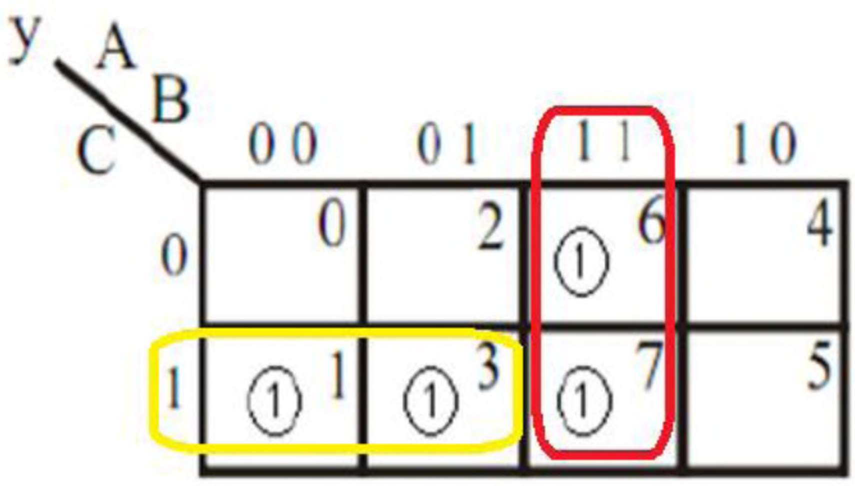
Fonksiyonun Karnough Haritasına Yerleştirilmesi

- Tablodan karno diyagramına başka bir aktarım şekli daha vardır. Bu durum 4 değişkenli karno ya (1) leri aktarırken daha pratik olmaktadır. Hata yapma ihtimalini azaltmaktadır.
- Eğer tablo hazırlanırken sol baş tarafa sayıların binary karşılıklarını desimal (veya satır no diyebiliriz) olarak yazarsak karno haritasında da karşılık gelen yere de 1'leri yazarsak daha çabuk sonuca gidebiliriz.

Satır No	A	B	C	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Fonksiyonun Karnough Haritasına Yerleştirilmesi

- Tablodaki satır numaraları karnoda kendi hücrelerine yazılmıştır. Örneğin 3 nolu satıra denk gelen ABC girişi (0 1 1) ve y çıkışı 1 karno içinde 3 nolu hücreye yazılmıştır. Yine 1, 6 ve 7 nolu satırlara da denk gelen karno hücrelerine 1'ler yazılmış ve gruplanmıştır.

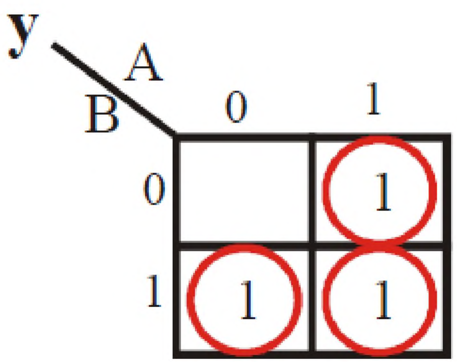


y = A.B+A'.C

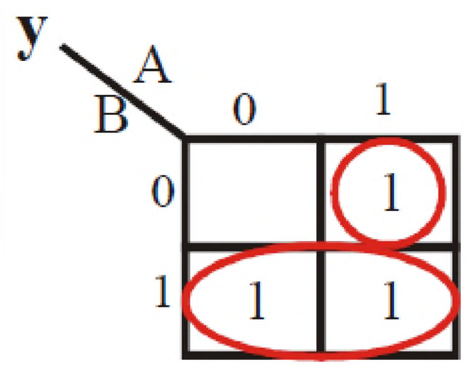
Karno Haritasında Gruplandırma

- Gruplama konusu karnonun en can alıcı noktasıdır. Gruplama yaparken şunlara dikkat edilir:
- Gruplama yaparken sadece “1” ler dikkate alınır. Boş olan yerler “0” demektir ve buraların gruplama yaparken önemi yoktur.
- Karno haritalarında hedef en çok “1” i gruplamaktır.
- Hiçbir “1” açıkta kalmamalıdır.
- Gruplar 1, 2, 4, 8, 16 gibi iki ve ikinin üs katları şeklinde olmalıdır.
- Karno haritaları üzerinde çapraz gruplama yapılamaz. Gruplar yanyana ya da alt alta olmalıdır.
- **Kural 3:** İndirgemenin en iyi olması için en büyük gruplama yapılır.

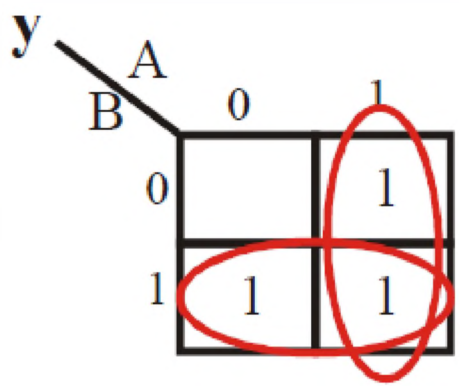
Karno Haritasında Gruplandırma



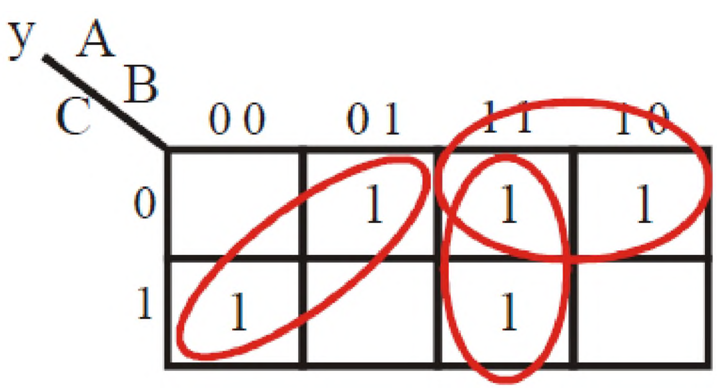
Yanlış Gruplama



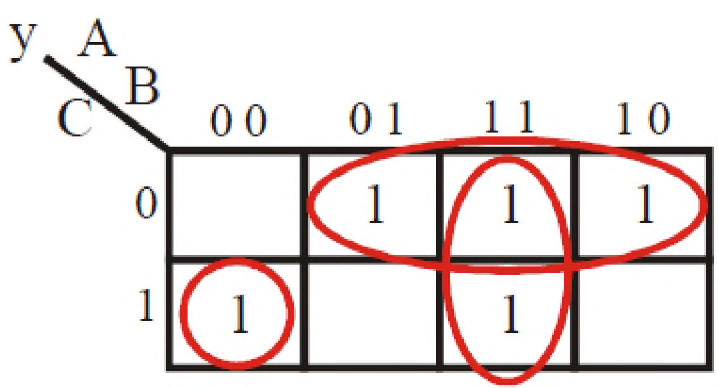
Eksik Gruplama



Doğru Gruplama

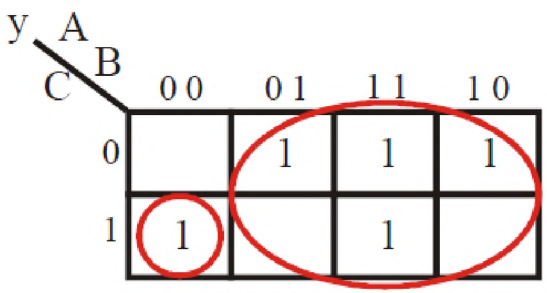


Yanlış Gruplama

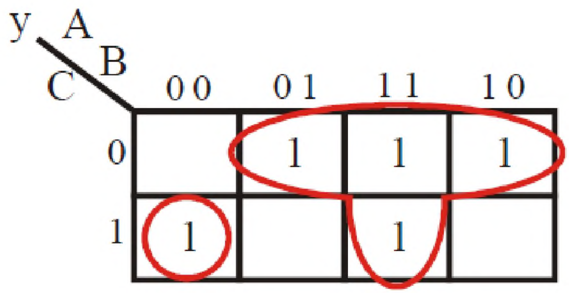


Yanlış Gruplama

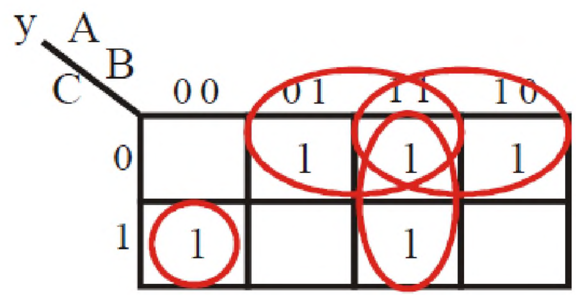
Karno Haritasında Gruplandırma



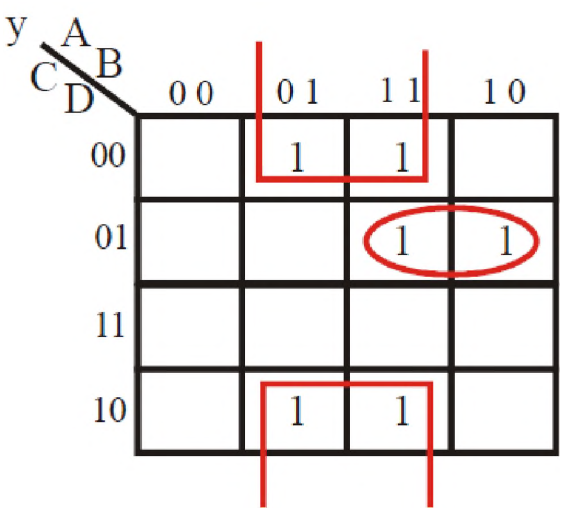
Yanlış Gruplama



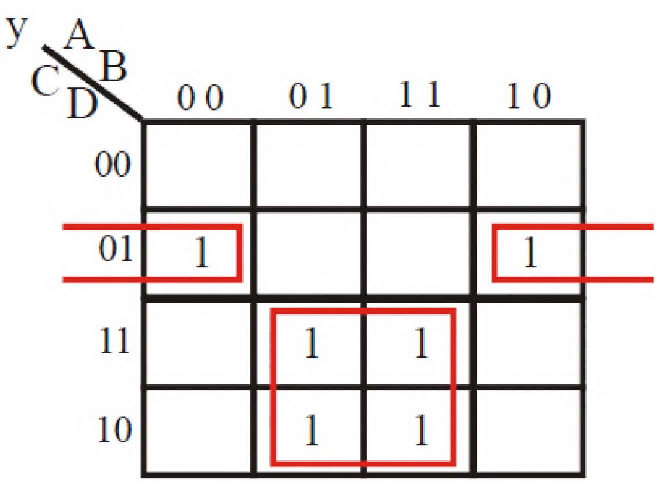
Yanlış Gruplama



Doğru Gruplama

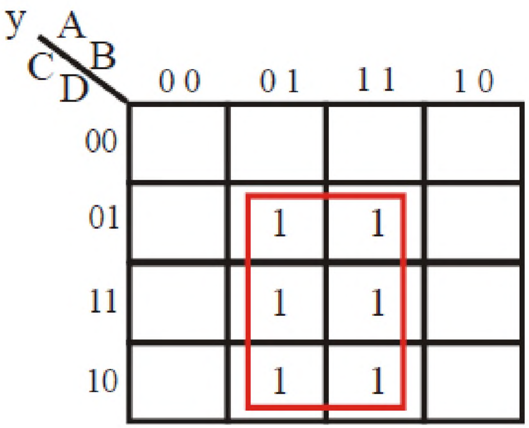


Doğru Gruplama

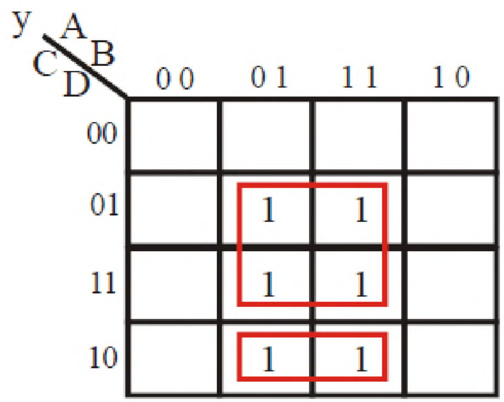


Doğru Gruplama

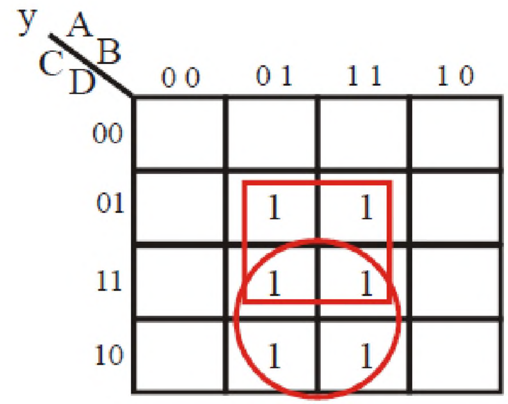
Karno Haritasında Gruplandırma



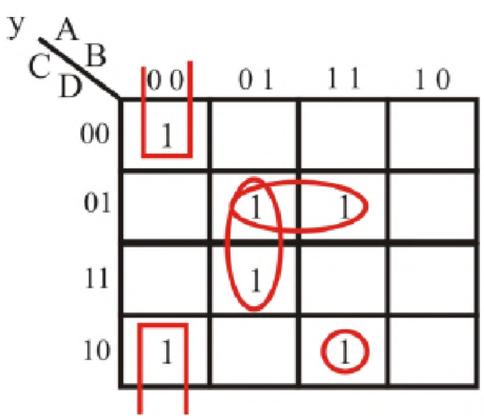
Yanlış Gruplama



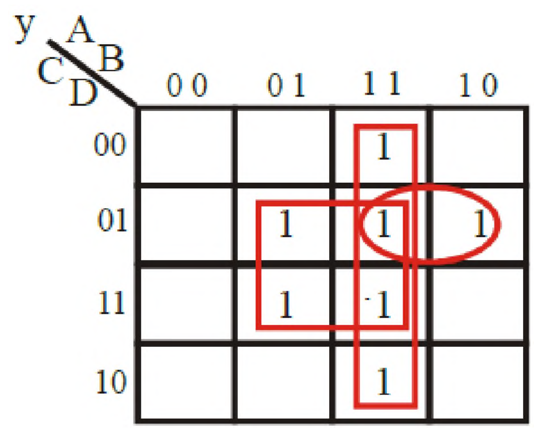
Eksik Gruplama



Doğru Gruplama



Doğru Gruplama



Doğru Gruplama

Karno Haritasından İndirgenmiş Fonksiyonun Yazılması

- **Kural 4**: Gruplanmış karnoya bakarak indirgenmiş fonksiyon yazılır.
- İndirgenmek istenen fonksiyon önce karnoya yerleştirilir, sonra en uygun şekilde gruplanır ve artık gruplanmış olan karnoya bakılarak indirgeme yapılabilir. Gruplanmış olan karnoya bakılarak indirgemenmiş fonksiyonun nasıl yazılacağını örnekleri inceleyerek kolaylıkla anlayabilirsiniz.
- Örnek 11.1'de karno haritasına yerleştirdiğimiz gruplanmış $y = A.B.C' + A'.B'.C + B.C$ şeklinde verilen fonksiyonu karno yöntemi ile indirgeleyelim.

Karno Haritasından İndirgenmiş Fonksiyonun Yazılması

Değişkenler			Çıkış ifadesi
A	B	C	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

y: C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	

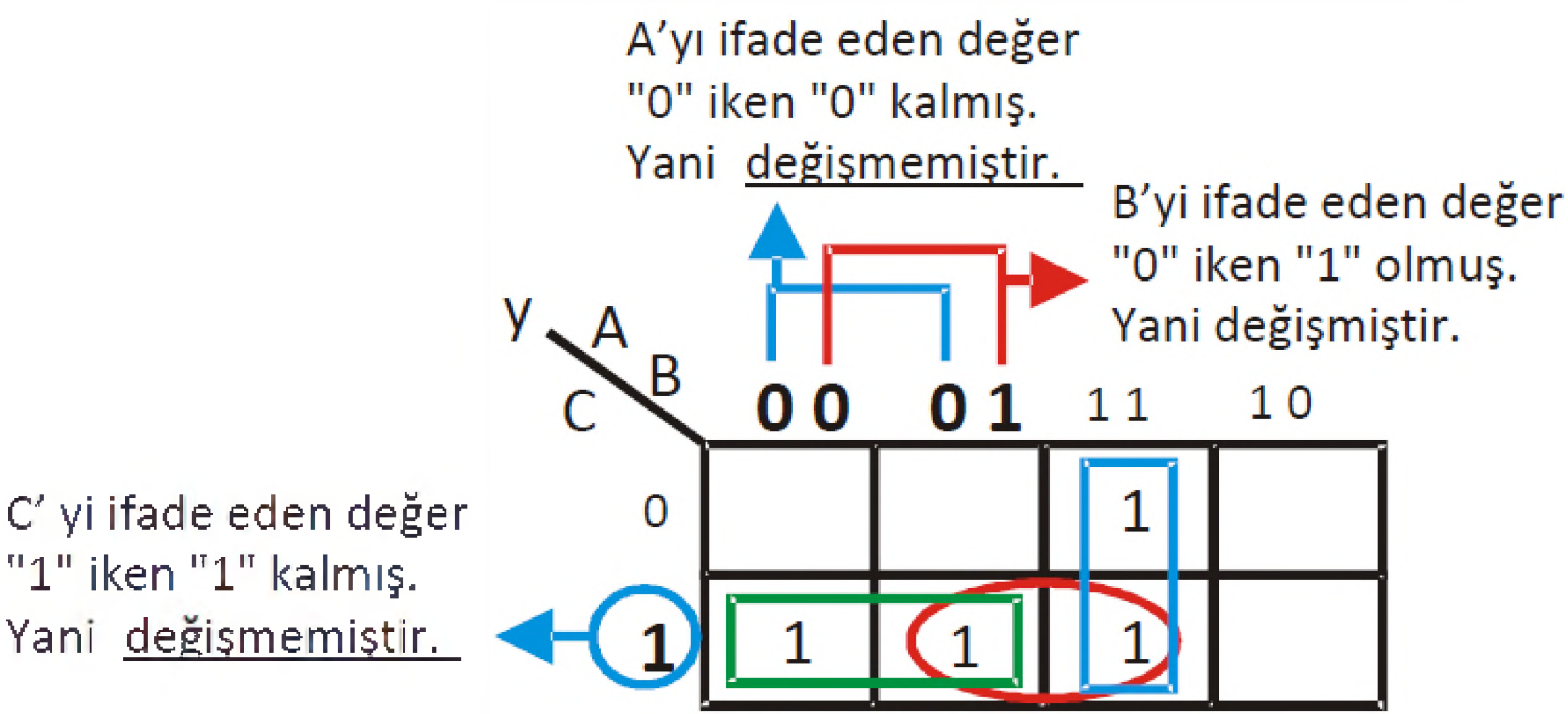
- Karnoya bakıldığında 3 adet grup olduğunu görülmektedir. Bu gruplar yeşil, kırmızı ve mavi renkler ile ayrı ayrı gösterilmiştir. Her biri 2 adet “1” içermektedir yani ikili gruptur.

Karno Haritasından İndirgenmiş Fonksiyonun Yazılması

- İndirgenmiş fonksiyon yazılırken her bir gruba ayrı ayrı bakılır.
- Her gruptan çarpım şeklinde 1 ifade çıkar.
- Her gruptan çıkan bu ifadeler toplanınca (yani toplam şeklinde yazılınca) indirgenmiş fonksiyon yazılmış olur. Örneğimizde 3 adet grup olduğundan y= Y + K + M şeklinde bir ifade oluşacaktır.
- Y ifadesini bulmak için yeşil gruba bakalım. Burada A değişmemiş, B değişmiş, C değişmemiştir.
- Değişen ifadeler sadeleşen ifadelerdir.
- Değişmeyen ifadeler ise alınır.

Karno Haritasından İndirgenmiş Fonksiyonun Yazılması

- Bu bilgiler ışığında yeşil gruptan çıkacak sonuç (A'.C) olacaktır.

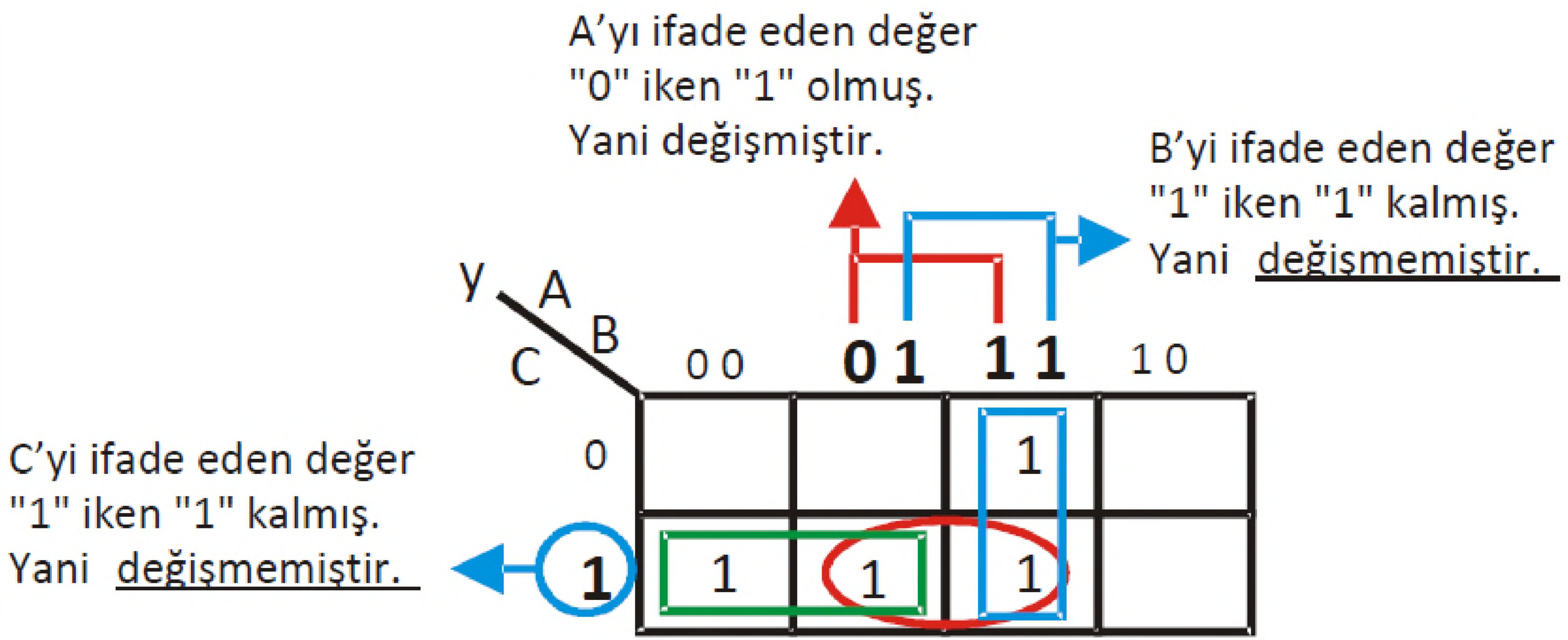


Karno Haritasından İndirgenmiş Fonksiyonun Yazılması

- **Dikkat**: Burada sadece grubu kapsayan değerlere bakıldığına dikkat edin! Yukardaki şekilde sadece grubun bulunduğu alana denk düşen A, B, C değerleri yazılmıştır. Grubu kapsayan değerlerden kastedilen budur.
- Grup içinde değeri değişenler indirgenmiş demektir ve indirgenmiş fonksiyon yazımında kullanılmazlar. Örneğimizde B nin değeri değiştiğinden B yazılmayacaktır.
- Değeri değişmeyenler ise çarpım şeklinde alınırlar. Örneğimizde A ile C nin değeri değişmediğinden çarpım şeklinde yazılacak demektir. Burada öğreneceğimiz son bir kural daha vardır. Bu ifadeler çarpım şeklinde yazılırken;
- Değeri "1" olanlar kendileri şeklinde (A, B, C …..) yazılırlar.
- Değeri "0" olanlar değilleri şeklinde (A', B', C' ……) yazılırlar.

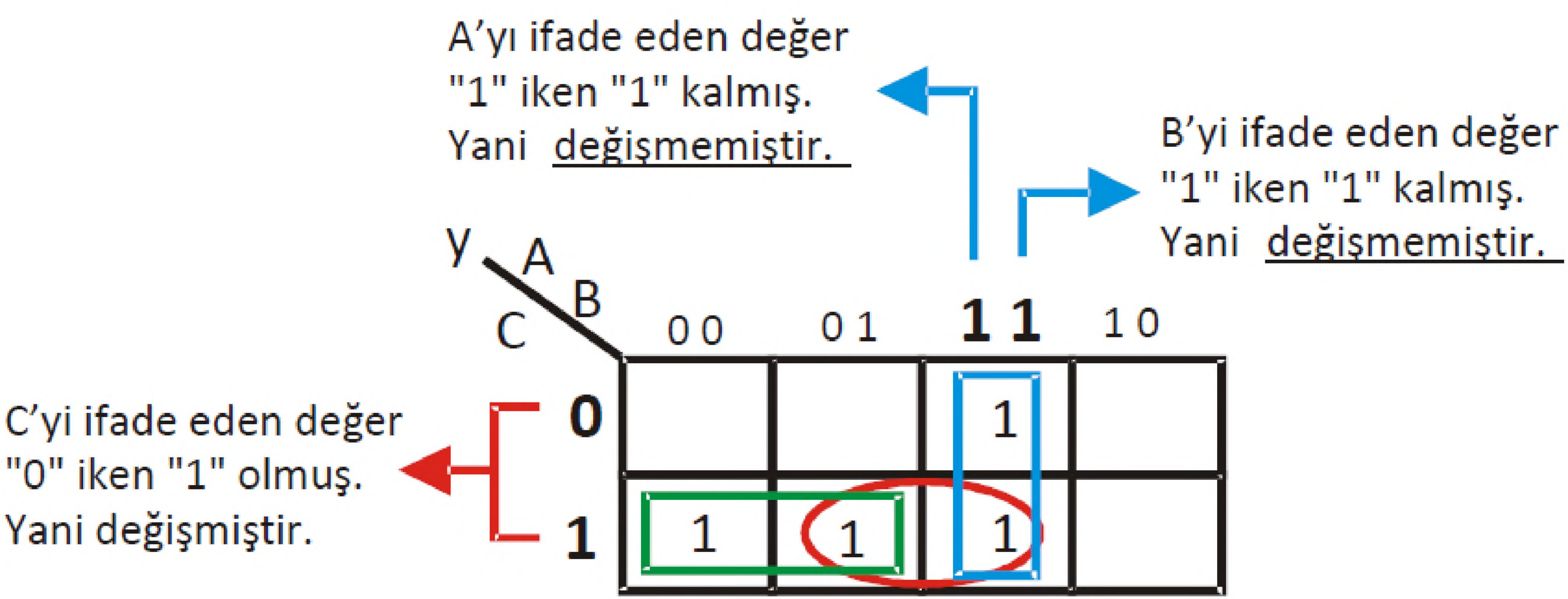
Karno Haritasından İndirgenmiş Fonksiyonun Yazılması

- Kırmızı gruba bakarsak, bu gruptan çıkacak sonuç (B.C) olacaktır.



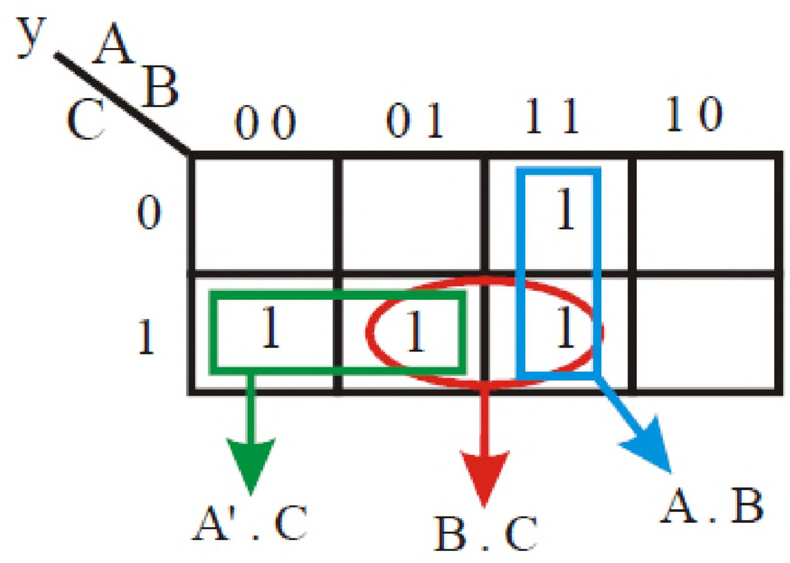
Karno Haritasından İndirgenmiş Fonksiyonun Yazılması

- Mavi gruba bakacak olursak bu gruptan çıkacak sonuç (A.B) olacaktır.



Karno Haritasından İndirgenmiş Fonksiyonun Yazılması

- Bu 3 gruptan çarpım şeklinde çıkan sonuçlar ard arda toplandığında indirgenmiş fonksiyon elde edilir.
- **İNDİRGENMİŞ FONKSİYON**:
- y= (A'.C) + (B.C) + (A.B)
- y= A'.C + A.B şeklinde olacaktır.



İndirgenmiş Fonksiyon y = A'.C+B.C+A.B

İndirgenmiş Fonksiyon ve Sonuç

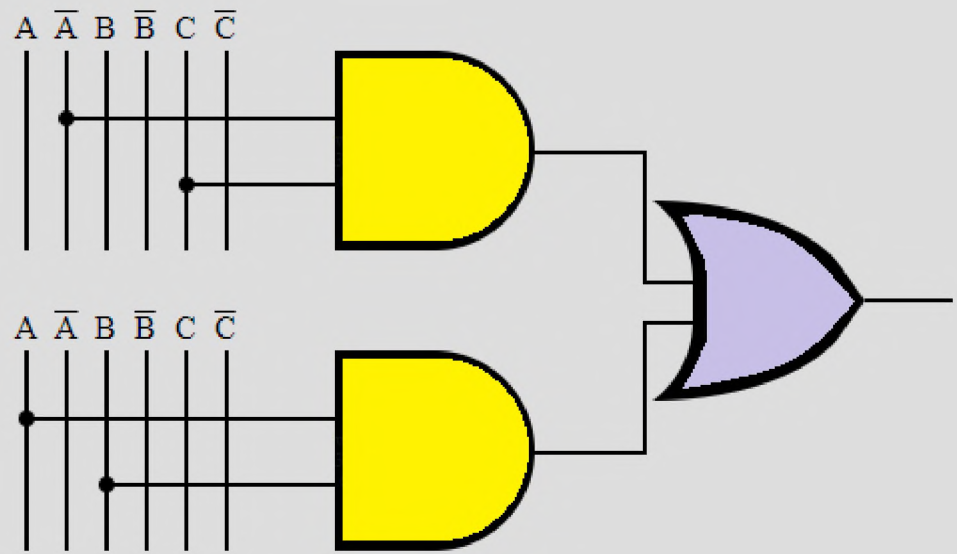
Doğruluk Tablosu

	A	B	C	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Gruplar

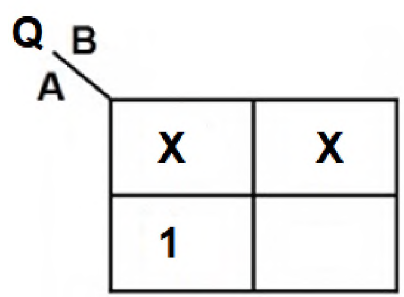
(1,3)	$\overline{A}.C$
(6,7)	$A.B$

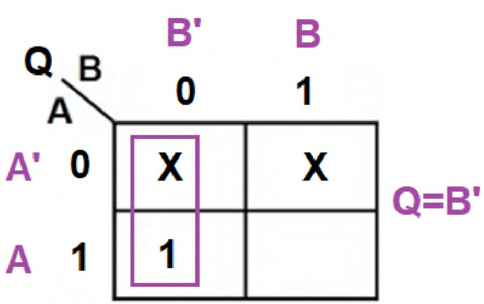
$$y = A'C + AB$$



Farketmezlere Göre Karno Haritası

- Bazı tasarımlarda gerek giriş gerekse çıkış değişkenlerinin bir önemi yoktur. Bu durumda ifadenin önemsiz olduğunu belirtmek için 0 ve 1 dışında özel bir karekter olan “X” kullanılır. Buna farketmez, önemsiz vb… gibi adlar verilebilir.
- “X” bulunan kutular duruma göre “0” veya “1” kabul edilir. Burada amaç en büyük gruplamayı yapmaktır. Önemsizlerin hepsi kullanılabileceği gibi en büyük gruplama yapabilmek için istenilen “X” i alınıp bazı “X” ler grup dışında bırakılabilir.
- **Örnek:** Yandaki Karno Haritasının çıkış ifadesini yazalım.





İlgili Videolar

- https://www.youtube.com/watch?v=ej8yyZzpUhI
- https://www.youtube.com/watch?v=cze_I_pYjPA
- https://www.youtube.com/watch?v=oRGemF5TX_s
- https://www.youtube.com/watch?v=vzisA4e3HfY
- https://www.youtube.com/watch?v=4chjQFpVRag