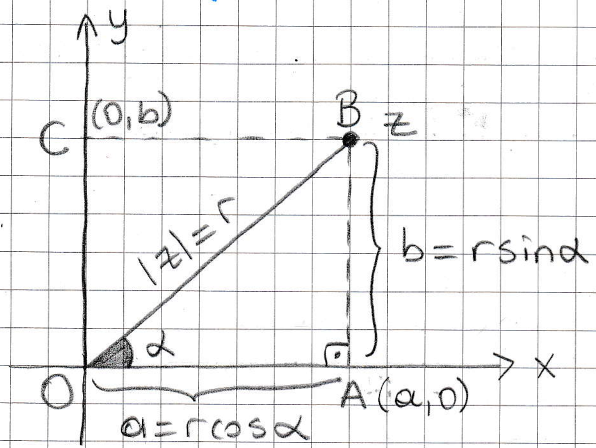
KARMAŞIK SAYILARIN KUTUPSAL GÖSTERİMİ



$\boxed{z = a + ib}$ karmaşık sayısının düzlemdeki görüntüsü $B(a,b)$ olsun.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos\alpha$$
$$\sin\alpha = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\sin\alpha$$

$z = a + ib$'de a ve b'yi yerine yazarsak:

$$z = |z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha$$

$$\boxed{z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{a}{|z|}}$, $\boxed{\sin\alpha = \frac{b}{|z|}}$, $\boxed{\tan\alpha = \frac{b}{a}}$

eşitliklerini sağlayan α gerçek sayısına z'nin argumenti denir. $\boxed{\arg(z) = \alpha}$ biçiminde gösterilir.

Argumentin $(0, 2\pi)$ aralığındaki değerine z'nin <u>esas argumenti</u> denir. Bir karmaşık sayının mutlak değeri ile argümentinin oluşturduğu ikiliye bu sayının <u>kutupsal koordinatları</u> denir.

$\boxed{(|z|, \alpha)}$ veya $\boxed{(r, \alpha)}$ biçiminde gösterilir.

K-13

KUTUPSAL BİÇİMDE İFADE EDİLMİŞ KARMAŞIK SAYILARIN ÇARPIMI VE BÖLÜMÜ

$\left.\begin{array}{l} z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta) \end{array}\right\}$ karmaşık sayıları için;

a) $z_1 . z_2 = r_1 . r_2 \left[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right]$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right]$

$\mathrm{Arg}(z_1 . z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

$\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

Örnekler:

1) $z_1 = 4(\cos 75° + i\sin 75°)$ ve

$z_2 = 2(\cos 15° + i\sin 15°)$ ise

a) $z_1 . z_2 = ?$ b) $\dfrac{z_1}{z_2} = ?$

a) $z_1 . z_2 = 4(\cos 75° + i\sin 75°)\, 2(\cos 15° + i\sin 15°)$

$= 8\left(\cos(75°+15°) + i\sin(75°+15°)\right)$

$= 8(\cos 90° + i\sin 90°)$

$= 8(0 + i.1) = \underline{8i}$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4(\cos 75° + i\sin 75°)}{2(\cos 15° + i\sin 15°)}$

$= 2(\cos 60° + i\sin 60°) = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \underline{1+\sqrt{3}\,i}$

DE - MOİVRE KURALI

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ise $\forall n \in \mathbb{Z}$ için,

$$\boxed{\begin{array}{l} z^n = r^n \cdot (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) \\ \arg z^n = n \cdot \arg z \end{array}}$$

Örnekler:

1) $z = \sqrt[3]{2}\,(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$ ise z^{12} nin standart biçimini bulalım.

$$z^{12} = (\sqrt[3]{2})^{12}\,(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)^{12}$$
$$= 2^{12/3}\,(\cos 12.20^\circ + i\sin 20^\circ.12)$$
$$= 16\,(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$$
$$= 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{-8-8\sqrt{3}i}$$

2) $z = \sqrt{3} + i$ ise z^{20} sayısını bulunuz.

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2 \text{ br}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\boxed{z = 2(\cos 30 + i\sin 30^\circ)}$$

$$z^{20} = 2^{20}\,(\cos 30 + i\sin 30)^{20}$$
$$z^{20} = 2^{20}\,(\cos 20.30^\circ + i\sin 20.30^\circ)$$
$$= 2^{20}\,(\cos 600^\circ + i\sin 600^\circ)$$
$$= 2^{20}\,(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$$
$$= 2^{20}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{2^{19}(-1-\sqrt{3}i)}$$

K-BONUS

$z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ve $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$

karmaşık sayıları için,

a) $z_1 . z_2 = r_1 . r_2 \left[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right]$

İSPAT: $z_1 . z_2 = \left[r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]\left[r_2(\cos\beta + i\sin\beta)\right]$

$$= r_1 . r_2 \Big[\big(\underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{\cos(\alpha+\beta)}\big)$$

$$+ i\big(\underbrace{\sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}_{\sin(\alpha+\beta)}\big)\Big]$$

$$\boxed{z_1 . z_2 = r_1 . r_2 \left[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right]}$$

b) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r_2(\cos\beta + i\sin\beta)}$$
$[(\cos\beta - i\sin\beta)]$

$$= \frac{r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{r_2(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{r_2(\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1})}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\Big[\underbrace{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}_{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$+ i\big(\underbrace{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta}_{\sin(\alpha-\beta)}\big)\Big]$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right]}$$