σ^2 'nin Kestirimi

β_0 ve β_1 kestirimine ek olarak, varsayımların test edilmesi ve regresyon modeline ilişkin aralık kestirimlerinin oluşturulabilmesi için σ^2 kestiriminin de elde edilmesi gerekmektedir. σ^2, **artık** ya da **hata kareler toplamından** elde edilmektedir :

$$SS_{\text{Res}} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad \textbf{(1.16)}$$

SS_{Res}'i hesaplamak için uygun bir formül, $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$'yi Denklem (1.16)'da yerine koyularak ve sadeleştirilerek elde edilebilir.

$$SS_{\text{Res}} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 - \hat{\beta}_1 S_{xy} \qquad \textbf{(1.17)}$$

olup burada $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \equiv SS_T$ olmak üzere,

$$SS_{\text{Res}} = SS_T - \hat{\beta}_1 S_{xy} \qquad \textbf{(1.18)}$$

olarak yazılabilir.

- Artık kareler toplamı (SS_{Res}), (n-2) serbestlik derecesine sahiptir çünkü iki serbestlik derecesi $\hat{y}_i$'yı elde etmekte kullanılan $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ kestirimlerine karşılık gelmektedir.

$$E(SS_{\text{Res}}) = (n-2)\sigma^2$$

olmak üzere σ^2'nin **yansız bir kestiricisi,**

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_{\text{Res}}}{n-2} = MS_{\text{Res}} \qquad \textbf{(1.19)}$$

eşitliği kullanılarak elde edilir.

İspat : $$SS_{\text{Res}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

olmak üzere,

$$SS_{\text{Res}} = (y-\hat{y})'(y-\hat{y})$$
$$= \left[y - X(X'X)^{-1}X'y\right]'\left[y - X(X'X)^{-1}X'y\right]$$
$$= y'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]y$$

biçiminde yeniden yazılabilir. $\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]$ matrisi simetrik ve eş güçlü bir matris olup

$$\frac{SS_{\text{Res}}}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}y'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]y$$

eşitliği bir χ^2 dağılımından gelir. Serbestlik derecesi, aynı zamanda matrisin iz değeri olan $\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]$'nün rankından elde edilir. İz değeri (n-p)'dir.

Modelin doğru olduğu varsayımı altında,

$$E(y) = X\beta$$

olup merkezi olmama parametresi,

$$\frac{1}{\sigma^2}E(y')\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]E(y) = \frac{1}{\sigma^2}\beta'X'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]X\beta$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\beta'\left[X'X - X'X(X'X)^{-1}X'X\right]\beta = 0$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\frac{SS_{\text{Res}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p}$$

olduğundan SS_{Res} için beklenen değer,

$$E(SS_{\text{Res}}) = E(y'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]y) =$$
$$= iz\left(\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]\sigma^2 I\right) + E(y)'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]E(y)$$
$$= (n-p)\sigma^2$$

olup

$$E(MS_{\text{Res}}) = E\left(\frac{SS_{\text{Res}}}{n-p}\right) = \sigma^2$$

$$E(SS_{\mathrm{Res}}) = (n-p)\sigma^2$$

olarak elde edilir.

*****NOT :**

- $\hat{\sigma}^2$ 'nin karekökü, **"regresyonun standart hatası"** olarak adlandırılmaktadır.

- $\hat{\sigma}^2$, SS_{Res}'e dayandığından model hatalarına ilişkin varsayımların bozulumu ya da model biçiminin yanlış belirlenmesi, σ^2'nin kestiricisi olarak $\hat{\sigma}^2$'nın yararını ciddi oranda azaltmaktadır.

- $\hat{\sigma}^2$, regresyon modeli artıklarından hesaplandığından $\hat{\sigma}^2$'nın σ^2 için **model bağımlı** bir kestirim olduğu söylenebilir.

Örnek 1.2 Roket Yakıtı Verileri

$$SS_T = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}$$

$$= 92547433.45 - \frac{(42627.15)^2}{20} = 1693737.60$$

Denklem (1.18)'den,

$$SS_{\mathrm{Res}} = SS_T - \hat{\beta}_1 S_{xy}$$

$$= 1693737.60 - (-37.15)(-41112.65) = 166402.65$$

olup σ^2 'nin kestirimi,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_{\mathrm{Res}}}{n-2} = \frac{166402.65}{18} = 9244.59$$

olarak elde edilir.