

## En Küçük Karelerin Özellikleri

- $$E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'y] = E[(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)]$$
$$= E[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon] = \beta$$

$E(\varepsilon) = 0$  ve  $(X'X)^{-1}X'X = I$  olmak üzere,  $\hat{\beta}$ , eğer model doğru ise  $\beta$ 'nin **yansız bir kestiricisidir**.

- $\hat{\beta}$ 'nin varyans özelliği, kovaryans matrisi ile ifade edilir :

$$Cov(\hat{\beta}) = E\left\{\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]'\right\}$$

Kovaryans matrisi  $p \times p$  boyutlu simetrik bir matristir ve  $j$ . köşegen elemanı  $\hat{\beta}_j$ 'nin varyansını,  $ij$ . köşegen dışı elemanı ise  $\hat{\beta}_i$  ve  $\hat{\beta}_j$  arasındaki kovaryansı verir.

$\hat{\beta}$ 'nin kovaryans matrisi,

$$Cov(\hat{\beta}) = Var(\hat{\beta}) = Var\left[(X'X)^{-1}X'y\right]$$

ile bulunur. Burada,  $(X'X)^{-1}X'$  sabitler matrisidir ve  $y$ 'nin varyansı  $\sigma^2 I$ 'dir. Böylece,

$$Var(\hat{\beta}) = Var\left[(X'X)^{-1}X'y\right] = (X'X)^{-1}X'Var(y)\left[(X'X)^{-1}X'\right]'$$
$$= \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

elde edilir. Bundan dolayı, eğer  $C = (X'X)^{-1}$  alırsak,  $\hat{\beta}_j$ 'nin varyansı,  $\sigma^2 C_{jj}$ 'dir ve  $\hat{\beta}_i$  ile  $\hat{\beta}_j$  arasındaki kovaryans ise  $\sigma^2 C_{ij}$ 'dir.

## $\sigma^2$ 'nin Kestirimi

$$SS_{Res} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 = e'e$$

olmak üzere  $e = y - X\hat{\beta}$  ifadesi yerine konulduğunda;

$$SS_{Res} = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$$
$$= y'y - \hat{\beta}'X'y - y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$= y' y - 2\hat{\beta}' X' y + \hat{\beta}' X' X \hat{\beta}$$

$X' X \hat{\beta} = X' y$  olmak üzere,

$$SS_{Res} = y' y - \hat{\beta}' X' y \quad (2.9)$$

olarak elde edilir.

Artık kareler ortalaması,

$$MS_{Res} = \frac{SS_{Res}}{n - p} \quad (2.10)$$

olup  $\sigma^2$ 'nin yansız kestiricisi,

$$\hat{\sigma}^2 = MS_{Res} \quad (2.11)$$

olur.

### Örnek 2.2 Teslim Süresi Verileri

Örnek 2.1'de meşrubat şişeleme fabrikası teslim süresi verileri için oluşturulan çoklu regresyon modelinin  $\sigma^2$  hata varyansının kestirimi;

$$y' y = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 18,310.6290$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}' X' y &= \begin{bmatrix} 2.34123115 & 1.61590721 & 0.01438483 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 559.60 \\ 7,375.44 \\ 337,072.00 \end{bmatrix} \\ &= 18,076.90304 \end{aligned}$$

olup artık kareler toplamı,

$$\begin{aligned} SS_{Res} &= y' y - \hat{\beta}' X' y \\ &= 18,310.6290 - 18,076.9030 = 233.7260 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\sigma^2$ 'nin kestirimi artık kareler ortalamasıdır :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_{Res}}{n - p} = \frac{233.7260}{25 - 3} = 10.6239$$

## En Çok Olabilirlik Kestirimi

Regresyon modeli,

$$y = X\beta + \varepsilon$$

olsun. Burada hatalar,  $\sigma^2$  sabit varyansıyla Normal ve bağımsız dağılımlıdır. ( $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ )

Hatalar için normal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon_i^2\right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\varepsilon, \beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(\varepsilon_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon' \varepsilon\right)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede,  $\varepsilon = y - X\beta$  yazıldığında olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$L(y, X, \beta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)'(y - X\beta)\right) \quad (2.12)$$

Basit doğrusal regresyonda olduğu gibi olabilirliğin logaritması alındığında,

$$\ln L(y, X, \beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

olur.

$\sigma$ 'nın sabit bir değeri için,  $(y - X\beta)'(y - X\beta)$  ifadesi minimum olduğunda, log olabilirlik maksimum olacak ve bundan dolayı  $\beta$ 'nin en çok olabilirlik kestiricisi hatalar normal iken  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$  en küçük kareler kestiricisine eşittir.

$\sigma^2$ 'nin en çok olabilirlik kestiricisi ise,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})}{n} \quad (2.13)$$

olur.