ÇOKLU DOĞRUSAL REGRESYONDA HİPOTEZ TESTİ

Modeldeki parametrelerin kestirimi yapıldığında, iki soruyla karşı karşıya kalınır.

1. Modelin genel yeterliliği nedir?
2. Bağımsız değişkenlerden hangileri önemli görünmektedir.

Birçok hipotez test işlemi, bu soruları yanıtlamada yararlı olacaktır. Bu testler, rastgele hataların bağımsız olmaları, $E(\varepsilon)=0$ ve $Var(\varepsilon_i)=\sigma^2$ ile Normal dağılmaları kuralını gerektirir.

Regresyonun Anlamlılık Testi

Regresyonun anlamlılık testi, y yanıt değişkeni ile $x_1, x_2, ..., x_k$ bağımsız değişkenleri arasında **doğrusal bir ilişkinin** olup olmadığına karar vermek için kullanılan bir testtir. Bu amaçla kullanılacak uygun hipotezler aşağıdadır:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$$
$$H_1 : \beta_j \neq 0 \ \text{ en az bir } j \text{ için}$$

Sıfır hipotezinin reddedilmesi, $x_1, x_2, ..., x_k$ bağımsız değişkenlerinden en az birinin modele anlamlı bir katkısı olduğunu gösterir.

Toplam değişim, SS_T ; **regresyon kareler toplamı**, SS_R ve **artık kareler toplamı**, SS_{Res} olmak üzere;

$$F_0 = \frac{SS_R / k}{SS_{\mathrm{Res}} / (n-k-1)} = \frac{MS_R}{MS_{\mathrm{Res}}}$$

oranı, $F_{k,n-k-1}$ dağılır. $\beta^* = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)'$ ve "merkezileştirilmiş" model matrisi X_c,

$$X_c = \begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & x_{12}-\bar{x}_2 & ... & x_{1k}-\bar{x}_k \\ x_{21}-\bar{x}_1 & x_{22}-\bar{x}_2 & ... & x_{2k}-\bar{x}_k \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{i1}-\bar{x}_1 & x_{i2}-\bar{x}_2 & ... & x_{ik}-\bar{x}_k \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1}-\bar{x}_1 & x_{n2}-\bar{x}_2 & ... & x_{nk}-\bar{x}_k \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$E(MS_{\mathrm{Res}}) = \sigma^2$$

$$E(MS_R) = \sigma^2 + \frac{\beta^{*'} X'_c X_c \beta^*}{k\sigma^2}$$

olup eğer F_0 değeri büyükse, en az bir $\beta_j \neq 0$ olması olasıdır.

En az bir $\beta_j \neq 0$ ise k ve $n-k-1$ serbestlik dereceleriyle F_0, $\lambda = \dfrac{\beta^{*}\,' X'_c X_c \beta^*}{\sigma^2}$ merkezi olmama parametresi ile merkezi olmayan bir F dağılımına sahip olur. Eğer,

$$F_0 > F_{\alpha,k,n-k-1}$$

ise H_0 reddedilir.

TABLO 2.5 Çoklu Regresyonda Regresyonun Anlamlılığı İçin Varyans Analizi

Değişimin Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	F_0
Regresyon	SS_R	k	MS_R	MS_R / MS_{Res}
Artıklar	SS_{Res}	$n-k-1$	MS_{Res}	
Toplam	SS_T	$n-1$		

Regresyon kareler toplamı, $SS_R = \hat{\beta}' X' y - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}$ olup **artık kareler toplamı,** $SS_{\text{Res}} = y'y - \hat{\beta}' X' y$ **ve toplam değişim,** $SS_T = y'y - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}$ eşitliği ile elde edilir.

Örnek 2.3 The Delivery Time Data

Örnek 2.1'deki teslim süresi verileri kullanılarak regresyonun anlamlılığı test edilmek istensin.

$$SS_T = y'y - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} = 18,310.6290 - \frac{(559.60)^2}{25} = 5784.5426 \quad \text{ve}$$

$$SS_R = \hat{\beta}' X' y - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} = 18,076.9030 - \frac{(559.60)^2}{25} = 5550.8166 \text{ olmak üzere,}$$

$$SS_{\mathrm{Res}} = SS_T - SS_R = y' y - \hat{\beta}' X' y = 233.7260$$

şeklinde elde edilir. $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ hipotezini test etmek için F_0 test istatistiği,

$$F_0 = \frac{MS_R}{MS_{\mathrm{Res}}} = \frac{2775.4083}{10.6239} = 261.24$$

olarak hesaplanır.

TABLO 2.6 Örnek 2.3 İçin Regresyonun Anlamlılık Testi

Değişim Kaynağı	Kareler Toplamı	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	F_0	p-değeri
Regresyon	**5550.8166**	**2**	**2775.4083**	**261.24**	$\mathbf{4.7 \times 10^{-16}}$
Artıklar	**233.7260**	**22**	**10.6239**		
Toplam	**5784.5426**	**24**			

Teslim süresinin, teslim hacmine ya da mesafeye bağlı olduğu sonucuna varılabilir.

$\boldsymbol{R^2}$ **ve Düzeltilmiş** $\boldsymbol{R^2}$ **:** Modelin genel anlamda yeterliliği ile ilgili olarak diğer iki yol, $\boldsymbol{R^2}$ ve $\boldsymbol{R^2}_{Adj}$ ile gösterilen **düzeltilmiş** $\boldsymbol{R^2}$'dir.

$$R^2_{Adj} = 1 - \frac{SS_{\mathrm{Res}} / (n-p)}{SS_T / (n-1)} \tag{2.14}$$

Tablo 2.4'te teslim süresi verilerinin çoklu regresyon modeli için R^2 değeri, $R^2 = 0.96$ olarak bulunmuştur. Örnek 1.9'da sadece tek bir bağımsız değişken x_1 kullanıldığında R^2 değeri daha küçüktür.($R^2 = 0.93$) Genellikle R^2 değeri, modele bir bağımsız değişken eklendiğinde değişkenin katkısına bakmaksızın asla azalmaz. Tek değişkenli(x_1) basit doğrusal regresyon için $R^2_{Adj} = 0.927$ iken iki değişkenli model için $R^2_{Adj} = 0.956$ olarak bulunmuştur. Burada x_2 modele eklendiğinde toplam değişimde anlamlı bir azalma olduğu sonucuna varılabilir.

Tek Tek Regresyon Katsayıları ve Katsayıların Alt Kümeleri İçin Testler

Herhangi bir regresyon katsayısının, örneğin β_j 'nin anlamlılığının testi için hipotezler,

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad , \quad H_1 : \beta_j \neq 0 \qquad \textbf{(2.15)}$$

olarak kullanılır. Eğer $H_0 : \beta_j = 0$ reddedilemezse bu durumda x_j bağımsız değişkeni modelden çıkarılabilir.

Bu hipotez için test istatistiği,

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)} \qquad \textbf{(2.16)}$$

olup burada C_{jj}, $\hat{\beta}_j$ 'ya karşılık gelen $(X'X)^{-1}$ 'in köşegen elemanıdır. Eğer $|t_0| > t_{\alpha/2,\, n-k-1}$ ise $H_0 : \beta_j = 0$ hipotezi reddedilir. Bu test, **kısmi** ya da **marjinal test** olarak adlandırılmakta olup **modelde diğer bağımsız değişkenler varken x_j 'nin katkısını** test etmektedir.

Örnek 2.4 Teslim Süresi Verileri

Modelde x_1 (teslim hacmi) değişkeni varken x_2 (mesafe) bağımsız değişkeninin değerlendirilmek istenildiği varsayılsın.

$$H_0 : \beta_2 = 0 \quad , \quad H_1 : \beta_2 \neq 0$$

Test istatistiği,

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{22}}} = \frac{0.01438}{\sqrt{(10.6239)(0.00000123)}} = 3.98$$

$t_{0.025,22} = 2.074$ olduğundan $H_0 : \beta_2 = 0$ hipotezi reddedilir ve modelde x_1 (teslim hacmi) bağımsız değişkeni varken x_2 (mesafe) bağımsız değişkeninin modele anlamlı bir katkı sağladığı görülmüştür.

Kısmi F Testi

$x_i (i \neq j)$ bağımsız değişkenleri modelde varken x_j'nin katkısı **katkı kareler toplamıyla** belirlenebilir. Bu yöntem aynı zamanda modelde bağımsız değişkenlerin bir **alt kümesinin** katkısının da araştırılmasında kullanılabilir.

k bağımsız değişkenli regresyon modeli,

$$y = X\beta + \varepsilon$$

olup burada y, $n \times 1$; $\boldsymbol{X}$, $n \times p$; β, $p \times 1$; ε, $n \times 1$ boyutlu ve $p = k + 1$'dir.

Regresyon katsayıları vektörü,

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada β_1, $(p-r) \times 1$ ve β_2, $r \times 1$'dir.

$$H_0 : \beta_2 = 0 \quad , \quad H_1 : \beta_2 \neq 0 \qquad \textbf{(2.17)}$$

hipotezi test edilmek istensin. Bu durumda model,

$$y = X\beta + \varepsilon = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon \qquad \textbf{(2.18)}$$

olup **tam model** olarak adlandırılmaktadır. Burada $n \times (p-r)$ boyutlu X_1 matrisi, β_1'e karşılık gelen X'in sütunlarını ve $n \times r$ boyutlu X_2 matrisi ise β_2'ye karşılık gelen X'in sütunlarını göstermektedir.

Tam model için, $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$ olmak üzere **regresyon kareler toplamı** ve **artık kareler ortalaması**,

$$SS_R(\beta) = \hat{\beta}' X' y \quad (p \text{ serbestlik derecesiyle})$$

$$MS_{\text{Res}} = \frac{y'y - \hat{\beta}'X'y}{n-p}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Regresyona β_2 teriminin katkısını bulmak için sıfır hipotezi $H_0 : \beta_2 = 0$'ın doğru olduğu varsayımı ile bir model kurulur. Bu **indirgenmiş model**,

$$y = X_1\beta_1 + \varepsilon \tag{2.19}$$

olup β_1'in en küçük kareler kestiricisi $\hat{\beta}_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y$ olarak elde edilir. Regresyon kareler toplamı, $SS_R(\beta_1) = \hat{\beta}_1'X_1'y$ ($p-r$ serbestlik derecesiyle) eşitliği ile elde edilir.

Modelde $\boldsymbol{\beta_1}$ varken $\boldsymbol{\beta_2}$'den dolayı regresyon kareler toplamı, $p-(p-r)=r$ serbestlik derecesiyle $SS_R(\beta_2/\beta_1) = SS_R(\beta) - SS_R(\beta_1)$ eşitliği kullanılarak hesaplanır. Bu kareler toplamı, $\boldsymbol{\beta_2}$ **için katkı kareler toplamı** olarak adlandırılır.

$\boldsymbol{SS_R(\beta_2/\beta_1)}$, $\boldsymbol{MS_{Res}}$'den bağımsız olmak üzere; $\boldsymbol{\beta_2 = 0}$ hipotezi,

$$F_0 = \frac{SS_R(\beta_2 \setminus \beta_1)/r}{MS_{Res}} \tag{2.20}$$

istatistiği ile test edilir. Eğer $\boldsymbol{\beta_2 \neq 0}$ ise $\boldsymbol{F_0}$, merkezi olmayan $\boldsymbol{F}$ dağılımı gösterir. Merkezi olmama parametresi ise

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2}\beta_2'X_2'\left[I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'\right]X_2\beta_2$$

eşitliği ile hesaplanır. β_2 gerçekte önemli olsa bile λ yaklaşık olarak sıfır olabilir. Bu ilişki, aynı zamanda X_1 ve X_2 birbirlerine dik olduklarında testin maksimum gücünü göstermektedir. (Dik terimi ile $X_2'X_1 = 0$ olduğu kastedilmektedir.)

Eğer $F_0 > F_{\alpha,r,n-p}$ ise H_0 reddedilir; X_2'deki $x_{k-r+1}, x_{k-r+2}, ..., x_k$ bağımsız değişkenlerinden en az birinin regresyon modeline anlamlı katkısı olduğu sonucuna ulaşılır. Bu test, X_1'deki bağımsız değişkenler modelde iken X_2'deki bağımsız değişkenlerin modele katkısını ölçtüğü için **"kısmi F testi"** olarak da adlandırılır.

$$y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \varepsilon$$

modeli ele alınsın.

$$SS_R(\beta_1 \setminus \beta_0, \beta_2, \beta_3) \quad , \quad SS_R(\beta_2 \setminus \beta_0, \beta_1, \beta_3) \quad , \quad SS_R(\beta_3 \setminus \beta_0, \beta_1, \beta_2)$$

kareler toplamları, diğer tüm bağımsız değişkenler modelde iken her bir x_j, $j = 1,2,3$ bağımsız değişkeninin modele katkısını ölçen tek serbestlik dereceli kareler toplamlarıdır. Yani x_j bağımsız değişkeni modelde yokken x_j'nin modele eklenmesini değerlendirmiş oluyoruz.

$$SS_T = SS_R(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \setminus \beta_0) + SS_{\text{Res}}$$

olmak üzere, üç serbestlik dereceli regresyon kareler toplamı,

$$SS_R(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \setminus \beta_0) = SS_R(\beta_1 \setminus \beta_0) + SS_R(\beta_2 \setminus \beta_0, \beta_1) + SS_R(\beta_3 \setminus \beta_1, \beta_2, \beta_0)$$

olarak parçalanabilir. Alternatif olarak,

$$SS_R(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \setminus \beta_0) = SS_R(\beta_2 \setminus \beta_0) + SS_R(\beta_1 \setminus \beta_2, \beta_0) + SS_R(\beta_3 \setminus \beta_1, \beta_2, \beta_0)$$

biçiminde de parçalanabilir. Katkı kareler toplamı yöntemi, genel olarak,

$$SS_R(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \setminus \beta_0) \neq SS_R(\beta_1 \setminus \beta_2, \beta_3, \beta_0) + SS_R(\beta_2 \setminus \beta_1, \beta_3, \beta_0) + SS_R(\beta_3 \setminus \beta_1, \beta_2, \beta_0)$$

ifadesinden dolayı her zaman regresyon kareler toplamının parçalara ayrılmasını sağlamayabilir.

Minitab Çıktısı : Tablo 2.4'te regresyon kareler toplamının ardışık parçalanması verilmektedir.

$$SS_R(\beta_1, \beta_2 \setminus \beta_0) = SS_R(\beta_1 \setminus \beta_0) + SS_R(\beta_2 \setminus \beta_1, \beta_0)$$
$$5550.8 \quad = \quad 5382.4 \quad + \quad 168.4$$

Örnek 2.5 Teslim Süresi Verileri

$$H_0 : \beta_2 = 0 \quad , \quad H_1 : \beta_2 \neq 0$$

olmak üzere β_2 için oluşacak katkı kareler toplamı,

$$\begin{aligned} SS_R(\beta_2 \setminus \beta_1, \beta_0) &= SS_R(\beta_1, \beta_2, \beta_0) - SS_R(\beta_1, \beta_0) \\ &= SS_R(\beta_1, \beta_2 \setminus \beta_0) - SS_R(\beta_1 \setminus \beta_0) \end{aligned}$$

Örnek 2.3'te elde edildiği gibi,

$$SS_R(\beta_1, \beta_2 \setminus \beta_0) = \hat{\beta}' X' y - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} = 5550.8166 \quad \text{(2 serbestlik dereceli)}$$

olup Örnek 1.9'daki $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$ indirgenmiş modeli için regresyon kareler toplamı,

$$\begin{aligned} SS_R(\beta_1 \setminus \beta_0) &= \hat{\beta}_1 S_{xy} = (2.1762)(2473.3440) \\ &= 5382.4077 \quad \text{(1 serbestlik dereceli)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda, x_1 modeldeyken x_2'nin modele eklenmesiyle regresyon kareler toplamındaki artış,

$$SS_R(\beta_2 \setminus \beta_1, \beta_0) = 5550.8166 - 5382.4088$$
$$= 168.4078 \text{ (1 serbestlik dereceli)}$$

olur. $H_0 : \beta_2 = 0$ hipotezinin testi için test istatistiği,

$$F_0 = \frac{SS_R(\beta_2 \setminus \beta_1, \beta_0)}{MS_{\text{Res}}} = \frac{168.4078/1}{10.6239} = 15.85$$

olup bu ifadenin paydasındaki MS_{Res}, tam modelden elde edilen değerdir. $F_{0.05,1,22} = 4.30$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir ve x_2 değişkeninin modele katkısının anlamlı olduğu sonucuna varılır.

Bu kısmi F testi, tek bir değişken içerdiği için t testine eş değerdir. $\left(t_0^{\,2} = (3.98)^2 = 15.84 = F_0\right)$

Genel Doğrusal Hipotez Testleri

İlgilenilen sıfır hipotezinin $\boldsymbol{H_0 : T\beta = 0}$ olduğu varsayılsın. Burada $\boldsymbol{T}$, $m \times p$ boyutlu sabitler matrisidir. Öyle ki sadece $\boldsymbol{T\beta} = \mathbf{0}$'daki "$m$" denklemden "$r$" tanesi bağımsızdır. Tam model (FM), $\boldsymbol{y = X\beta + \varepsilon}$ olup bu model için artık kareler toplamı,

$$\boldsymbol{SS_{\text{Res}}(FM) = y'y - \hat{\beta}'X'y} \qquad \textbf{(}\boldsymbol{n-p}\textbf{ serbestlik derecesiyle)}$$

ile bulunur.

İndirgenmiş modeli elde etmek için $\boldsymbol{T\beta} = \mathbf{0}$'daki "$r$" bağımsız eşitlik, tam modelde geriye kalan $p-r$ regresyon katsayıları türünden "r"regresyon katsayılarını çözmek için kullanılır. Bu durum, $y = Z\gamma + \varepsilon$ indirgenmiş modelini oluşturur. Bu modelde, $\boldsymbol{Z}$, $n \times (p-r)$ matrisi ve $\boldsymbol{\gamma}$, $(p-r)\times 1$ bilinmeyen regresyon katsayıları vektörüdür.

$\boldsymbol{\gamma}$'nın kestirimi,

$$\hat{\gamma} = (\boldsymbol{Z'Z})^{-1}\boldsymbol{Z'y}$$

olup indirgenmiş model (RM) için artık kareler toplamı,

$$\boldsymbol{SS}_{\mathrm{Res}}(\boldsymbol{RM}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} \qquad (n-p+r \text{ serbestlik derecesiyle})$$

ile bulunur.

İndirgenmiş model, tam modelden daha az parametre içermektedir. Sonuç olarak, $SS_{\mathrm{Res}}(RM) \geq SS_{\mathrm{Res}}(FM)$ olur. $\boldsymbol{H_0}:\boldsymbol{T\beta}=\boldsymbol{0}$ hipotezini test etmek için $n-p+r-(n-p)=r$ serbestlik dereceli artık kareler toplamları arasındaki fark,

$$SS_H = SS_{\mathrm{Res}}(RM) - SS_{\mathrm{Res}}(FM) \tag{2.21}$$

olup $\boldsymbol{H_0}:\boldsymbol{T\beta}=\boldsymbol{0}$ hipotezi için kareler toplamı olarak adlandırılır. Bu hipotez için test istatistiği,

$$F_0 = \frac{SS_H / r}{SS_{\mathrm{Res}}(FM)/(n-p)} \tag{2.22}$$

ile bulunur. Eğer, $F_0 > F_{\alpha,r,n-p}$ ise $\boldsymbol{H_0}:\boldsymbol{T\beta}=\boldsymbol{0}$ hipotezi reddedilir.

Örnek 2.6 Regresyon Katsayılarının Eşitlik Testi

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

modeli ele alınsın. Tam model için $SS_{\mathrm{Res}}(FM)$, $n-p=n-4$ serbestlik derecesine sahiptir. $H_0:\beta_1=\beta_3$ hipotezi test edilmek istensin. Bu hipotez $\boldsymbol{H_0}:\boldsymbol{T\beta}=\boldsymbol{0}$ olarak ifade edilebilir. Burada, $\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{1}, \quad \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{-1}]$, 1×4 'lük satır vektörüdür.

$\boldsymbol{T\beta}=\boldsymbol{0}$'da tek bir eşitlik vardır yani $\beta_1-\beta_3=0$'dır. Bu eşitlik tam modelde yerine yazıldığında indirgenmiş model elde edilir.

$$\begin{aligned} y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_1 x_3 + \varepsilon \\ &= \beta_0 + \beta_1(x_1+x_3) + \beta_2 x_2 + \varepsilon \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \varepsilon \end{aligned}$$

Burada, $\gamma_0=\beta_0$, $\gamma_1=\beta_1(=\beta_3)$, $z_1=x_1+x_3$, $\gamma_2=\beta_2$ ve $z_2=x_2$ alınır. F oranı, $F_0=(SS_H/1)[SS_{\mathrm{Res}}(FM)/(n-4)]$ olup bu hipotez, t istatistiği kullanılarak da (n-4) serbestlik derecesiyle test edilebilir.

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_3}{se(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_3)} = \frac{\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_3}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(C_{11}+C_{33}-2C_{13})}}$$

Örnek 2.7

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

olmak üzere, $H_0 : \beta_1 = \beta_3$, $\beta_2 = 0$ hipotezi test edilmek istensin.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{T\beta} = \mathbf{0}$'da $\boldsymbol{\beta_1 - \beta_3 = 0}$ ve $\boldsymbol{\beta_2 = 0}$ olmak üzere iki eşitlik vardır. Bu eşitlikler, aşağıdaki indirgenmiş modeli verirler :

$$\begin{aligned} y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_1 x_3 + \varepsilon \\ &= \beta_0 + \beta_1 (x_1 + x_3) + \varepsilon \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 z_1 + \varepsilon \end{aligned}$$

Bu örnekte, $SS_{\mathrm{Res}}(RM)$, $n-2$ serbestlik derecesine sahiptir. SS_R ise $n-2-(n-4)=2$ serbestlik derecesine sahiptir. F oranı, $F_0 = (SS_H / 2) / \left[SS_{\mathrm{Res}}(FM) / (n-4) \right]$ olarak elde edilir.

- Genel doğrusal hipotez için test istatistiği,

$$F_0 = \frac{\hat{\beta}' T' \left[T (X'X)^{-1} T' \right]^{-1} T \hat{\beta} / r}{SS_{\mathrm{Res}}(FM) / (n-p)} \qquad \textbf{(2.23)}$$

biçiminde de yazılabilir. Test istatistiğinin bu şekli, Örnek 2.6 ve örnek 2.7'deki test işlemi için geliştirilebilir.

- Genel doğrusal hipotezler,

$$H_0 : T\beta = c \ , \ H_1 : T\beta \neq c \qquad \textbf{(2.24)}$$

olarak test edilmek istendiğinde, test istatistiği,

$$F_0 = \frac{(T\hat{\beta} - c)' \left[T (X'X)^{-1} T' \right]^{-1} (T\hat{\beta} - c) / r}{SS_{\mathrm{Res}}(FM) / (n-p)} \qquad \textbf{(2.25)}$$

şeklinde kullanılır. Eğer $F_0 > F_{\alpha, r, n-p}$ ise $H_0 : T\beta = c$ hipotezi reddedilir. Eğer $H_0 : T\beta = 0$ (ya da $H_0 : T\beta = c$) reddedilemez ise bu durumda sıfır hipotezine konulan kısıtlara göre β kestirimi yapmak güvenilir olabilir. Bilindik en küçük kareler kestiricisinin bu kısıtları sağlaması olası değildir. Bu gibi durumlarda **kısıtlı en küçük kareler kestiricisini** kullanmak yararlı olabilir.

Ödev

3 bağımsız değişkeni olan ve 12 örneklemden oluşturulmuş bir çoklu regresyon modelinden üretilen ANOVA tablosu verilmiştir. Tablodaki harflerin yerine gelecek sayıları bulunuz.

Kaynak	d.f	S.S.	M.S.	F
Regresyon	a	d	f	96
Artık	b	e	12	
Toplam	c			