### 1.2. Kutupsal Formda Gösterim

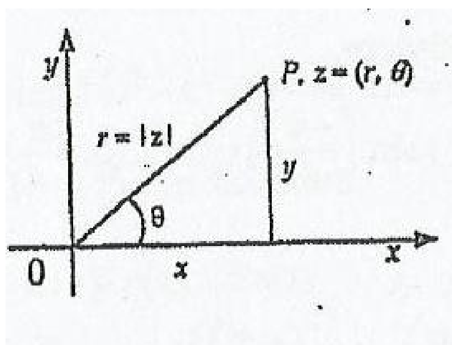
$z = x + iy$ vektörünün pozitif reel eksenle yaptığı açıya $\theta$ diyelim.

$\cos\theta = \frac{x}{|z|}$, $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$ ve buradan $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = arctan\frac{y}{x}$ olup $\theta$ ya $z$ nin argümenti denir ve $argz$ ile gösterilir.

Burada $-\infty < \theta < \infty$ olduğu açıktır. Eğer $-\pi < \theta \leq \pi$ kısıtlaması yapılırsa bu durumda $\theta$ ya $z$ nin esas argümenti denir ve $Argz$ ile gösterilir. Buna göre

$$argz = Argz + 2n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

olur.




$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

olmak üzere $z$ sayısı kutupsal olarak

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

**Euler Formülü.** $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\sin\theta$$

formülüne Euler formülü denir. Euler formülü yardımıyla $z$ sayısı üstel olarak

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

şeklinde yazılır.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ifadesine **de Moivre formülü** denir.

**Soru 1.** $1+\sqrt{3}i$ sayısını kutupsal formda yazınız.

**Çözüm.** $|z| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ ve $cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{2}$, $sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve buradan

$1+\sqrt{3}i$ kompleks sayısı kutupsal formda

$$1+\sqrt{3}i = 2(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$ nin herhangi bir değerinin kullanılabileceğine dikkat edilmelidir.

Örneğin $n=-1$ için

$$z = 2\left[cos(-\frac{5\pi}{3}) + isin(-\frac{5\pi}{3})\right] = 1+\sqrt{3}i$$

olur.

**Soru 2.** $z_1 = 1-\sqrt{3}i$ ve $z_2 = \sqrt{3}+i$ olmak üzere $z_1z_2$ yi kutupsal formda yazınız.

**Çözüm.** $z_1$ kompleks sayısını kutupsal formda $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1)$ ve $z_2$ kompleks sayısını kutupsal formda $z_2 = r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$ şeklinde gösterelim. Bu durumda $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ ve $tan\theta_1 = -\sqrt{3}$ olur ve buradan $\theta_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ radyandır.

Benzer şekilde $|z_2| = \sqrt{3+1} = 2$ ve $tan\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olur ve buradan $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ radyandır. O halde $z_1 = 2e^{\frac{5\pi i}{3}}$ ve $z_2 = 2e^{\frac{\pi i}{6}}$ dir.

Dolayısıyla $z_1 z_2 = 2e^{\frac{5\pi i}{3}} 2e^{\frac{\pi i}{6}} = 4e^{\frac{11\pi i}{6}} = 2\sqrt{3} - 2i$ bulunur.

**Soru 3.** $\frac{5i}{2+2i}$ sayısını kutupsal formda yazınız.

**Çözüm.** $z_1 = 5i$ ve $z_2 = 2+2i$ diyelim. Bu durumda $|z_1| = |5i| = 5$ ve $tan\theta_1 = \infty$ olur ve $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ dir. Benzer şekilde $|z_2| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$ ve $tan\theta_2 = 1$ olur ve $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ bulunur. Buradan

$\frac{5i}{2+2i} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{2\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = \frac{5}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ bulunur.

**Soru 4.** $z = (1+i)^{16} + (1-i)^{16}$ sayısının reel olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ve $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ olur ve buradan
$(1+i)^{16} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{16} = 2^8 e^{4\pi i} = 2^8$ ve
$(1-i)^{16} = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{16} = 2^8 e^{-4\pi i} = 2^8$ bulunur.

Böylece $z = (1+i)^{16} + (1-i)^{16} = 2^8 + 2^8 = 2^9$ elde edilir.

**Soru 5.** $\frac{(1+i)^7}{(1-i)^{10}} = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$ eşitliğini elde ediniz.

**Çözüm.** $1+i = 2^{1/2}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$ olur ve buradan $(1+i)^7 = 2^{7/2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})$ şeklindedir. Benzer şekilde $1-i = 2^{1/2}(cos(\frac{-\pi}{4}) + isin(\frac{-\pi}{4}))$ olur ve buradan $(1-i)^{10} = 2^5(cos(\frac{-10\pi}{4}) + isin(\frac{-10\pi}{4}))$ şeklindedir.

Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\frac{(1+i)^7}{(1-i)^{10}} &= \frac{2^{7/2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})}{2^5(cos(\frac{-10\pi}{4}) + isin(\frac{-10\pi}{4}))} \\
&= 2^{-\frac{3}{2}}(cos\frac{17\pi}{4} + isin\frac{17\pi}{4}) \\
&= 2^{-\frac{3}{2}}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}) \\
&= 2^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{i}{4}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

**Soru 6.** $n$ pozitif bir tamsayı ve $x_n + iy_n = (1+i)^n$ olsun. Bu durumda $x_{2n}^2 + y_{2n}^2 = 4^n$ olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** $w = 1+i$ diyelim. Bu durumda $w = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$ olur. $w^n = (\sqrt{2})^n(cos\frac{n\pi}{4} + isin\frac{n\pi}{4})$ elde edilir. İki kompleks sayının eşitliği tanımından $x_n = 2^{\frac{n}{2}}cos\frac{n\pi}{4}$ ve $y_n = 2^{\frac{n}{2}}sin\frac{n\pi}{4}$ elde edilir.

Buradan $x_{2n} = 2^n cos\frac{n\pi}{2}$ ve $y_{2n} = 2^n sin\frac{n\pi}{2}$ bulunur. Sonuç olarak

$$x_{2n}^2 + y_{2n}^2 = 2^{2n}\left(cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = 4^n$$

elde edilir.

**Soru 7.** $z^4 + 1 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

**Not.** Genel olarak bir $c \neq 0$ kompleks sayısının $n.(n \geq 1, n\ tamsay$ı) kökleri $z^n = c$ ise $z = e^{i\theta}$, ve $c = \rho e^{i\phi}$ olmak üzere kökler

$$\begin{aligned} z_k &= \rho^{1/n} e^{i(\frac{\phi+2k\pi}{n})} \\ &= \rho^{1/n}\left(cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0,1,2,...,(n-1) \end{aligned}$$

biçimindedir.

**Çözüm.** $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1$ ve $-1 = cos\pi + isin\pi$ dir.

$$(-1)^{\frac{1}{4}} = cos(\frac{\pi+2k\pi}{4}) + isin(\frac{\pi+2k\pi}{4}), \quad (k = 0,1,2,3)$$

bulunur. Kökler,

$$z_0 = cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$z_3 = cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

şeklindedir.

**Soru 8.** $\left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)^{\frac{3}{2}}$ sayısının tüm köklerini bulunuz.

**Çözüm.** $\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}i = 4(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$ yazılabilir ve buradan

$$\left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}\left(cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, 1$$

bulunur. Buradan kökler

$$z_0 = 8(cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8})$$

$$z_1 = 8(cos\frac{11\pi}{8} + isin\frac{27\pi}{8})$$

olarak elde edilir.

**Soru 9.** $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

**Çözüm.** $\triangle = b^2 - 4ac = (1+i)^2 - 4.1.5i = 1 + 2i + i^2 - 20i = -18i$ olur ve

$$\begin{aligned}\sqrt{\triangle} &= \sqrt{-18i} = (-18i)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, 1 \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 3 \mp 3i\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bulunan değerler $z = \frac{-b \mp \sqrt{\triangle}}{2a}$ denkleminde yerlerine yazıldığında

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(1+i)+3-3i}{2} = \frac{-1-i+3-3i}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

ve

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(1+i)-(3-3i)}{2} = \frac{-1-i-3+3i}{2} = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$$

elde edilir, o halde kökler

$$\{1-2i, -2+i\}$$

şeklindedir.

**Alıştırmalar**

**1)** Aşağıdaki sayıları kutupsal gösterimle yazınız.

**a)**$2+2\sqrt{3}i$ **b)** $-5i$

**2)** Aşağıdaki sayıları kutupsal gösterimden yararlanarak hesaplayınız.

**a)** $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ **b)**$(-1+i)^5$

**3)** Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz.

**a)** $z^2 = 1+i$ **b)**$z^3+i=0$

**4)** $(1+\sqrt{3}i)^6(-\sqrt{3}+i)^5 = 2^{10}(\sqrt{3}+i)$ eşitliğini elde ediniz.

**5)** $w$ birimin 1 den farklı olan bir $n$. kökü ise,

$$1+w+w^2+...+w^{n-1}=0$$

olduğunu gösteriniz.

**6)** Aşağıdaki köklerden herbirinin değerini bulunuz ve bu değerleri grafikle belirtiniz.

**a)** **a)**$(-1+i)^{1/3}$ **b)** $(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$ **c)**$(-1)^{-3/4}$

**7)** De Moivre formülünü kullanarak

$$\textbf{a)}\quad sin^3\theta = \frac{3}{4}sin\theta - \frac{1}{4}sin3\theta$$

$$\textbf{b)}\quad cos^4\theta = \frac{1}{8}cos4\theta + \frac{1}{2}cos2\theta + \frac{3}{8}$$

eşitliklerini ispatlayınız.