

## 2. ANALİTİK FONKSİYONLAR

### 2.1. Tek Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar

Kompleks sayılardan oluşan herhangi bir cümle  $S$  olsun.  $S$  üzerinde tanımlanmış bir  $f$  fonksiyonu,  $S$  de bulunan her bir  $z$  yi bir  $w$  kompleks sayısına eşleyen bir kuraldır.  $w$  sayısına  $f$  nin  $z$  deki değeri denir ve  $f(z)$  ile gösterilir, yani  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  dir.

**Soru 1.** Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

$$\text{a) } f(z) = z^2 \quad \text{b) } f(z) = \frac{z+1}{z-3} \quad \text{c) } f(z) = \frac{2z+5}{z^2+3z+1-3i}$$

**Çözüm.** a) Her  $z_0 \in \mathbb{C}$  için  $f(z_0) = z_0^2$  olduğundan  $f$ ,  $\mathbb{C}$  de tanımlıdır.

b)  $z-3=0$  denirse,  $z=3$  olur. O halde  $f$ ,  $\mathbb{C}-\{3\}$  kümesinde tanımlıdır.

c)  $z^2+3z+1-3i=0$  yazılırsa  $z_1=i$ ,  $z_2=-3-i$  bulunur, dolayısıyla  $f$ ,  $\mathbb{C}-\{i, -3-i\}$  kümesinde tanımlıdır.

**Soru 2.**  $f(z) = 4x^2 + i4y^2$  olsun. Bu eşitliğin sağ tarafını  $z$  cinsinden ifade ediniz.

**Çözüm.**

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

yazılarak

$$\begin{aligned} f(z) &= 4 \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + i4 \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 \\ &= z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 - i(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) \\ &= (1-i)z^2 + (2+2i)z\bar{z} + (1-i)\bar{z}^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

**Soru 3.**  $f(z) = x + y + i(x^3y - y^2)$  olmak üzere  $f(-2 + 3i)$  değerini hesaplayınız.

**Çözüm.**  $f(-2 + 3i) = -2 + 3 + i(-8.3 - 9) = 11 - 33i$  bulunur.

**Soru 4.**  $f(z) = z^2 + 4z\bar{z} - 5Re(z) + Im(z)$  olmak üzere  $f(-1 + 2i)$  değerini hesaplayınız.

**Çözüm.**  $f(-1+2i) = (-1+2i)^2 + 4(-1+2i)(-1-2i) - 5(-1) + 2 = 24 - 4i$  bulunur.

### Alıştırmalar

1) Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

$$\mathbf{a)} f(z) = z^5 + z + 4i \quad \mathbf{b)} f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}$$

2)  $f(z) = z^3 + z + 1$  fonksiyonunu  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  formunda yazınız.

3)  $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$  olsun. Bu eşitliğin sağ tarafını  $z$  cinsinden ifade ediniz.

**2.2. Dönüşümler**

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

denklem sistemi  $xy$ - düzleminden  $uv$ - düzlemine bir dönüşüm tanımladığından

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

fonksiyonu da  $z$  düzleminden  $w$  düzlemi üzerine bir dönüşüm olarak düşünülebilir.

**Soru 1.**  $w = (1 - i)z + 1 - 2i$  dönüşümü altında

a)  $z = -1 + i$  noktasının görüntüsünü bulunuz.

b)  $Im(z) > 1$  yarı düzleminin görüntüsünü bulunuz.

**Çözüm.** a)  $w = (1 - i)(-1 + i) + 1 - 2i = -1 + i + i + 1 + 1 - 2i = 1$  bulunur.

b)  $w = (1 - i)z + 1 - 2i$  eşitliğinden  $z$  çekilerek  $z = \frac{w-1+2i}{1-i}$  bulunur. Burada  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  yazılarak

$$x + iy = \frac{u + iv - 1 + 2i}{1 - i}$$

ve böylece

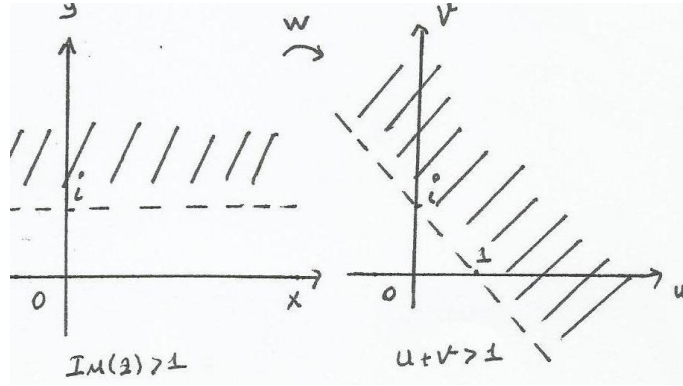
$$Re(z) = x = \frac{u - v - 3}{2}, \quad Im(z) = y = \frac{u + v + 1}{2}$$

elde edilir.

Bu durumda  $Im(z) > 1$  yarı düzleminin görüntüsü,

$$\begin{aligned} Im(z) = \frac{u + v + 1}{2} > 1 &\Rightarrow u + v - 1 > 0 \\ &\Rightarrow u + v > 1 \end{aligned}$$

yarı düzlemi olarak bulunur.



### Alıştırmalar

1)  $w = (1 + i)z + 2$  dönüşümü altında

a)  $y = 2x$     b)  $y = 3x + 2$     c)  $|z - 1| = 2$

ifadelerinin görüntülerini bulunuz.