2.3. Limit

Herhangi bir f fonksiyonu, z_0 noktasının bir komşuluğunda bulunan tüm z noktalarında tanımlanmış olsun. Burada f, z_0 noktasında tanımlı olmayabilir de.

$$lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

biçiminde gösterilen ve 'z, z_0 a yaklaşırken $f(z)$ nin limiti w_0 sayısıdır' ifadesi şudur: Eğer z_0 dan farklı bir z noktasını z_0 a yeteri kadar yakın seçersek, bu durumda $w = f(z)$ noktası w_0 a istenildiği kadar yakın alınabilir. Diğer bir ifadeyle

$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyle ki $0 < |z - z_0| < \delta$ iken $|f(z) - w_0| < \varepsilon$

gerçeklenir.

Teorem 1. $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$, $z_0 = x_0+iy_0$ ve $w_0 = u_0+iv_0$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \;\; ve \;\; \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

olmasıdır.

Teorem 2. $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$ ve $\lim_{z\to z_0} g(z) = b$ olsun. Bu durumda

i) $\lim_{z\to z_0}[f(z) + g(z)] = a + b$,

ii) $\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = ab$,

iii) $\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{a}{b},\ b \neq 0$,

iv) Eğer h, $f(z)$ noktalarında tanımlı ve $\lim_{w\to a} h(w) = c$ ise $\lim_{z\to z_0} h(f(z)) = c$ dir.

Soru 1. $u(x,y) = \frac{2x^3}{x^2+y^2}$ nin $(0,0)$ daki limitinin 0 olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$x = rcos\theta$$

$$y = rsin\theta$$

olmak üzere

$$u(x,y) = \frac{2r^3cos^3\theta}{r^2(cos^2\theta + sin^2\theta)} = 2rcos^3\theta$$

bulunur. Buradan

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r < \delta$$

iken

$$|u(x,y) - 0| = |2rcos^3\theta| = 2r|cos^3\theta| < 2r < \varepsilon$$

olduğundan $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ seçilirse istenilen elde edilmiş olur.

Soru 2. $u(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ nin $(0,0)$ da limiti yoktur, gösteriniz.

Çözüm.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = ?$$

Orijine $y = 0$ doğrusu boyunca (x- ekseni) yaklaşalım:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x.0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Orijine $y = x$ doğrusu boyunca yaklaşalım:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

$0 \neq \frac{1}{2}$ olduğundan $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$ yoktur.

Soru 3. $f(z) = \overline{z}$ fonksiyonunun z_0 daki limiti $\overline{z_0}$ dir, gösteriniz.

Çözüm. $\forall\varepsilon$ için $|f(z) - f(z_0)| = |\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \varepsilon$ alınırsa

$0 < |z - z_0| < \delta$ iken $|\overline{z} - \overline{z_0}| < \varepsilon$ sağlanır. Buradan

$$\lim_{z \to z_0} \overline{z} = \overline{z_0}$$

bulunur.

Soru 4. $f(z) = az + b$ olsun. $f(z)$ nin z_0 noktasındaki limitinin $az_0 + b$ olduğunu tanım kullanarak ispatlayınız.

Çözüm. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|z - z_0| < \delta$ iken $|az + b - az_0 - b| < \varepsilon$ olduğunu kabul edelim.

$|az + b - az_0 - b| = |a||z - z_0| < \varepsilon$ olup $|z - z_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}$ bulunur. $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ seçilerek ispat tamamlanır.

Soru 5.

$$\lim_{z \to 1-i} (z^2 + 2z - 3)$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\lim_{z \to 1-i} (z^2 + 2z - 3) = \lim_{z \to 1-i} z^2 + \lim_{z \to 1-i} 2z - \lim_{z \to 1-i} 3 = (1-i)^2 + 2(1-i) - 3 = -1 - 4i$$

bulunur.

Alıştırmalar

1) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$\textbf{a)} \lim_{z\to 1+i}(3z^2+z-5)$$

$$\textbf{b)} \lim_{z\to i}\frac{z^2-3z+1}{z+i}$$

2) Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında belirtilen noktalardaki limitlerini bulunuz.

a) $f(z)=\frac{1}{(z-i)^2},\ \ z=i$ **b)** $f(z)=\frac{z^2}{z^4+z+1},\ \ z=e^{\frac{\pi i}{4}}$

3) $z=0$ için $f(z)=\frac{\bar{z}}{z}$ nin limitinin olmadığını gösteriniz.

4) $f(z)=\frac{1}{z}$ olsun. $f(z)$ nin $z_0=i$ noktasındaki limitinin $-i$ olduğunu tanım kullanarak ispatlayınız.