2.4. Süreklilik

$f(z)$, z_0 ın bir komşuluğundaki her noktada tanımlı olsun. Eğer

$$1)\lim_{z\to z_0} f(z) \ \ mevcut,$$

$$2) f(z_0) \ \ tanımlı$$

$$3)\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

oluyorsa $f(z)$, z_0 noktasında süreklidir denir. Diğer bir ifadeyle, $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyle ki $|z - z_0| < \delta$ iken
$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ gerçeklenir.

Soru 1.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{zRez}{|z|}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktasında sürekli olduğunu tanım kullanarak ispatlayınız.

Çözüm. 1)

$\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyle ki $|z - z_0| < \delta$ iken $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$?

$$|f(z) - f(0)| = \left|\frac{zRez}{|z|} - 0\right| = \frac{|z||Rez|}{|z|} = |Rez|$$

olur ve $|Rez| \leq |z|$ olduğundan $\delta = \varepsilon$ seçilirse
$|z - z_0| < \delta$ iken $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ sağlanır.

2) $f(z_0) = f(0) = 0$

3)$\lim_{z\to 0} f(z) = 0 = f(0)$ olduğundan $f(z)$, $z_0 = 0$ da süreklidir.

Soru 2. $f(z) = \frac{z^2+4z}{z^2+1}$ fonksiyonunun $z_0 = i$ noktasında sürekli olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $g(z) = z^2 + 4z$, $h(z) = z^2 + 1$ fonksiyonları kompleks düzlemin tamamında sürekli olduğundan f, $h(z) = z^2 + 1 = 0$ olan z noktaları dışında süreklidir. $h(i) = 0$ olduğuna göre, f, i noktasında sürekli değildir.

Soru 3. $\lim_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$ olduğunu tanım kullanarak gösteriniz.

Çözüm. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|z - z_0| < \delta$ iken $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$?

$$\begin{aligned} |z^2 - z_0^2| &= |z - z_0||z + z_0| \\ &= |z - z_0||z + 2z_0 - z_0| \\ &\leq |z - z_0| \left(|z - z_0| + |2z_0|\right) \end{aligned}$$

bulunur. $|z - z_0| < 1$ kısıtlaması yapılırsa

$$|z^2 - z_0^2| < |z - z_0| \left(1 + 2|z_0|\right)$$

yazılabilir.

Buradan $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|}$ alabiliriz. Sonuç olarak $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|}\right\}$ alınırsa $\forall \varepsilon > 0$ için istenilen δ bulunmuş olur. $f(z) = z^2$ fonksiyonu kompleks düzlemin tamamında sürekli değildir; çünkü δ sayısı verilen noktaya bağlıdır.

Soru 4. $\mathcal{R} = \{z : |z| \leq 3\}$ kapalı yöresinde $f(z) = z^2$ fonksiyonu düzgün süreklidir, gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} |z^2 - z_0^2| &= |z - z_0||z + z_0| \\ &= |z - z_0| \left(|z| + |z_0|\right) \\ &\leq 6|z - z_0| \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$ alınarak f nin sürekliliği elde edilir. Burada δ yalnızca ε a bağlı olup f, $\mathcal{R} = \{z : |z| \leq 3\}$ kapalı yöresinde düzgün süreklidir.

Alıştırmalar

1) Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında belirtilen noktalarda sürekli olup olmadığını araştırınız.

$$\textbf{a)}\ f(z) = \frac{z^2+4}{z^3+1}, \quad z_0 = i \quad \textbf{b)} f(z) = |z|, \quad z_0 = 0$$

2)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)Im(z^2)}{|z|^2}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $z = 0$ noktasında sürekli midir, araştırınız.

3)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy}{z\bar{z}}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $z = 0$ noktasında sürekli midir, araştırınız.

4)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, z \neq 0 \\ 0, z = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun $z = 0$ noktasında sürekli olmadığını gösteriniz.

5) $f(z) = \frac{1}{z^2}$ olduğuna göre f nin $\{z : |z| \leq 1\}$ kümesinde düzgün sürekli olmadığını, fakat $\{z : \frac{1}{2}|z| \leq 1\}$ kümesi üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.