HAFTA 6:

Katlama işlemi özellikleri

3.4 Katlama işlemi özellikleri

Kesikli ya da sürekli zaman DZD-LTI bir sisteme ait çıkış sinyalini hesaplarken katlama işleminin özelliklerini kullanabilirsiniz. Tüm bu özellikleri kullanırken unutulmaması gereken en önemli husus katlama işleminin sadece ve sadece doğrusal zamanla değişmez sistemler için geçerli olacağıdır. Doğrusal olmayan bir sistem için de dürtü tepkisi geçerli olacaktır, diğer bir deyişle doğrusal olmayan bir sistemin girişine dürtü uygulandığında çıkışında dürtü tepkisi gözlenecektir; ANCAK doğrusal olmayan bu sistem sadece dürtü tepkisi ile ifade edilemeyecektir, katlama işlemi doğrusal olmayan sistemde kullanılamayacaktır.

3.4.1 Yer değiştirme özelliği (Commutative Property)

İster kesikli zamanda olsun, ister sürekli zamanda, katlama işleminin en basit ancak en temel özelliği yer değiştirme özelliğidir. Eşitlik 3.15'te sunulan denklem giriş sinyali ile DZD-LTI sistemin dürtü tepkisinin yer değiştirebileceğini göstermektedir. Bunun pratik olarak faydası katlama işleminin grafiksel olarak gerçekleştirilmesinde ortaya çıkar. Katlama sırasında dilediğimiz sinyalin (dürtü tepkisi ya da giriş sinyali) tersini alabileceğimiz anlamına gelmektedir. Bu durumda "3.2.3 Kesikli zaman doğrusal, zamanda değişmez sistemler için bir örnek" bölümünde verdiğimiz "tüyolara" ek olarak, grafiksel işlem ile katlama gerçekleştirirken dilediğimiz sinyalin y-eksenine göre simetriğini alabiliriz.

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \qquad (3.15)$$

İSPAT:

$\mathrm{n-k=r}$ değişken dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda $\mathrm{k=n-r}$ elde edilir.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=\infty}^{-\infty} x[n-r]h[r] \qquad (3.16)$$

Şimdi r yerine k değişkenini kullanıp Eşitlik 3.16'yı organize edersek,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = h[n] * x[n] \qquad (3.17)$$

Eşitlik 3.17 ile Eşitlik 3.15'in tıpatıp aynı olduğunu göstermiş oluruz. Sürekli zaman için ispat tamamen aynı olduğu için yapılmayacaktır.

3.4.2 Dağılma özelliği (Distributive Property)

Katlama işlemi için geçerli olan bir diğer basit ama etkin özellik Eşitlik 3.18'de verilen dağılma özelliğidir.

$$y(t) = x(t) * \big(h_1(t) + h_2(t)\big) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \qquad (3.18)$$

İSPAT:

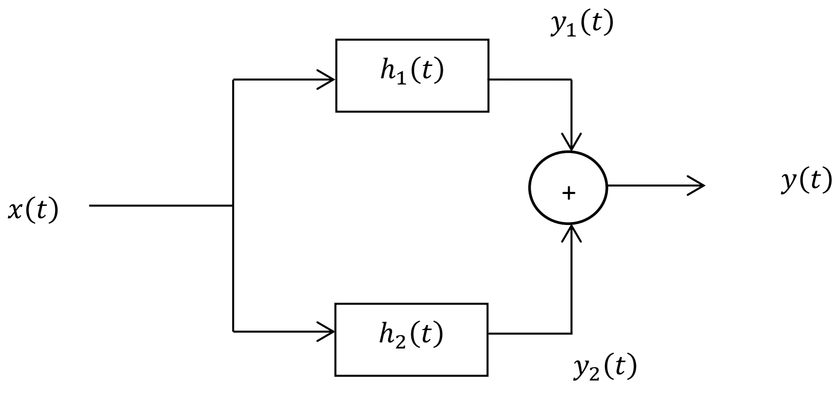
$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau,$$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

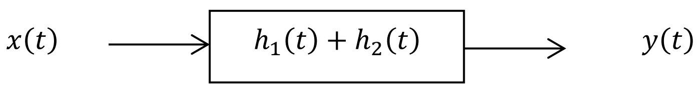
$$y(t) = \big(h_1(t) + h_2(t)\big) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(h_1(\tau) + h_2(\tau)\big)x(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \qquad (3.19)$$
$$= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Eşitlik 3.19'daki ispattan açık ve net olarak görülebileceği üzere dağılma özelliği ikiden çok sistem için de geçerli olacaktır. Bu durumda dağılma özelliğinin fiziksel anlamı kendini paralel sistemlerde bulur. Şekil 3.13'te verilen paralel bağlı iki veya daha çok sistem tek bir sistem altında dağılma özelliği kullanılarak verilebilir.



a.



b.

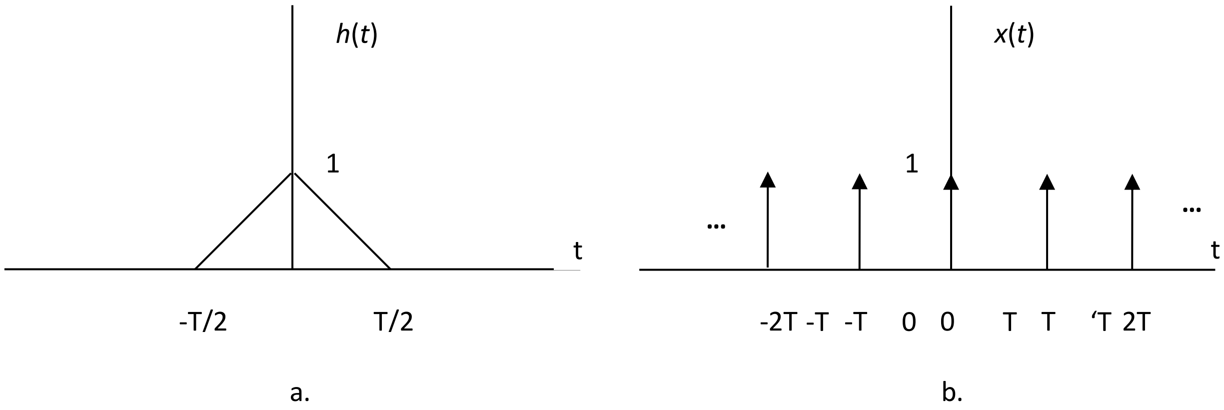
Şekil 3.13 Dağılma özelliğinin DZD-LTI sistemler için fiziksel anlamı. a. İki ayrı sistem ve b. Dağılma özelliği ile elde edilen tek bir sistem.

Hazır ispatlara başlamış iken dağılma özelliğini yer değiştirme özelliği ile birleştirerek kullanırsak Eşitlik 3.20'ye ulaşırız. Eşitlik 3.20 tanıdık gelmiş olmalı. Karmaşık bir giriş sinyalini, basit giriş sinyallerinin toplamı şeklinde ifade edebiliyor isek çıkış sinyali; sistemin, bu basit giriş sinyallerine verdiği çıkış sinyallerinin toplamı olur.

$$y(t) = h(t) * \big(x_1(t) + x_2(t)\big) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t) \qquad (3.20)$$

3.4.2.1 Dağılma özelliği kullanarak karmaşık bir katlama işleminin basit hale indirgenmesine örnek

Haberleşme teorisinde çok kullanılan ve öğrencilerin zaman bölgesinde olmasa da frekans bölgesinde katlamakta güçlük çektikleri sinyal Şekil 3.14'te verilmiştir. Her ne kadar örnek çözümlü de olsa, çözümünü incelemeden katlama işlemini mutlaka kendiniz gerçekleştirmeye çalışınız. Unutmayınız kaç kere ve kaç farklı kişinin bisiklete bindiğini seyretmek Size bisiklete binmeyi öğretmez. Bisiklete kendiniz binip, en az bir kere düşmelisiniz. Aşağıdaki örneği çözerken birden fazla düşmeniz normal sayılabilir.



Şekil 3.14 a. $h(t)$ ve b. $x(t)$ sinyallerinin katlanması.

Genel olarak herhangi bir sorunu çözerken dağılma özelliğinden faydalanabiliyor isek mutlaka faydalanmalıyız. YANİ: Karmaşık bir problemi, birden çok basit problemin toplamı şeklinde ifade edebiliyor ve çözdüğümüz basit problemleri topladığımızda karmaşık problemin çözümüne ulaşabiliyor isek hayatı kolaylaştırmış oluruz. Katlama işleminin doğrusal ve zamanda değişmez olduğunu bildiğimizden ve dağılma özelliğinden dolayı karmaşık bir giriş sinyalini, basit giriş sinyallerinin toplamı şeklinde ifade edebilmemizden faydalanmak istersek, yukarıdaki problemi

- **a)** $x(t)$ giriş sinyalini basit sinyal/sinyallerin toplamı olarak ifade edelim.
- **b)** Her bir basit giriş sinyali için katlama işlemini gerçekleştirelim.
- **c)** Katlama işlemlerinin toplamı bize aradığımız katlama işlemi sonucunu verecektir.

Örnek soruyu felsefi yönden çözmüş bulunuyoruz. Şimdi matematik kullanarak yordamın a) şıkkını çözelim. $x(t)$ sinyali sürekli zamanda kaymış birim dürtü sinyallerinin toplamından ibarettir.

- **a)** x(t) giriş sinyalini basit sinyal/sinyallerin toplamı olarak ifade edelim, daha sonra toplamı toplama operatörü haline getirerek pekiştirelim. Şekil 3.14.b'de sunulan $x(t)$ sinyalinden Eşitlik 3.21.a'ya, oradan da Eşitlik 3.21.b'ye geçiş yumuşak ve anlaşılır olmalıdır. Yordamın a) şıkkını anlamadan, b) şıkkını anlamak mümkün değildir.

$$x(t) = \cdots + \delta(t-2T) + \delta(t-T) + \delta(t) + \delta(t+T) + \delta(t+2T) + \cdots \qquad (3.21a)$$

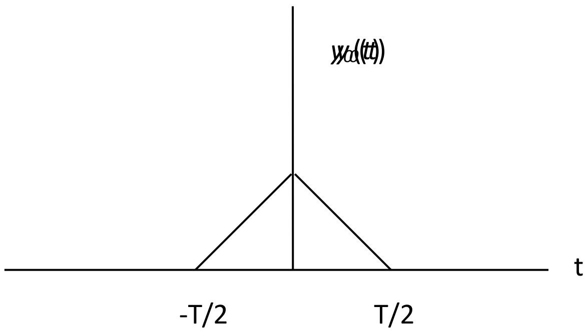
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \qquad (3.21b)$$

b) Her bir basit giriş sinyali için katlama işlemini gerçekleştirelim. Mevcut durum itibarı ile $h(t)$ sinyalini birim dürtü sinyallerinden herhangi biri ile katlamak gerekmektedir. $h(t)$ sinyalini örneğin $\delta(t)$ sinyali ile katladığımızda ne elde ederiz? Umarım Eşitlik 3.22'deki daha önce öğrendiklerimizi unutmuyoruz.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau = h(t) \qquad (3.22)$$

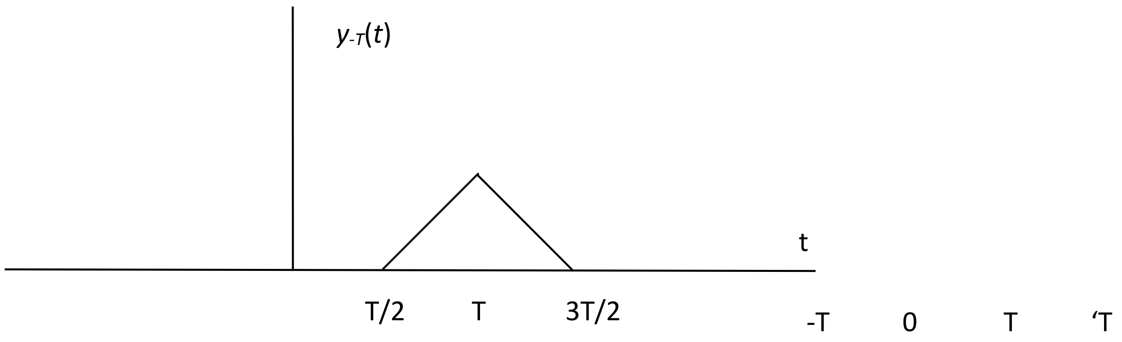
Herhangi bir sinyali birim dürtü sinyali ile katladığımızda kendisini elde ederiz. Bu durumda sadece $\delta(t)$ sinyali ile katladığımızda $h(t)$ sinyalini elde etmiş oluruz. Bu sinyal, Şekil 3.15'te gösterilmiş olup, giriş sinyalinin t=0 anındaki bileşeni nedeniyle ortaya çıktığı için $y_0(t)$ olarak adlandırılacaktır.



-T 0 T 'T

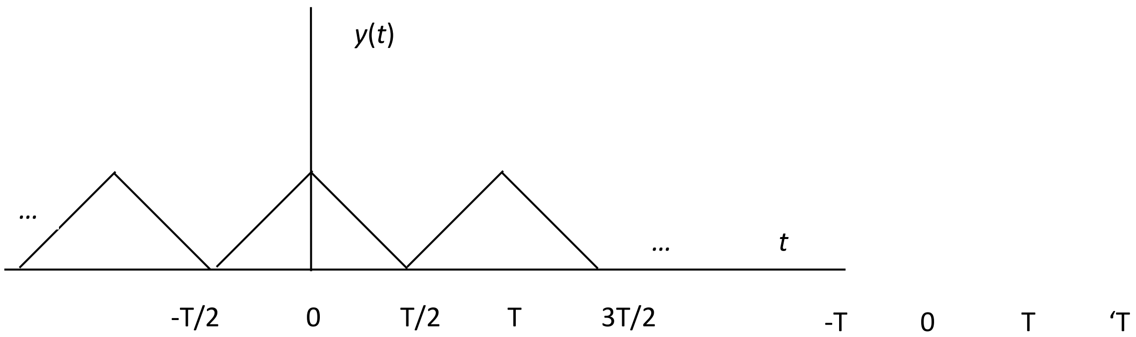
Şekil 3.15 Şekil 3.14'te verilen $h(t)$ sinyalinin $\delta(t)$ sinyali ile katlanması sonucu ortayan çıkan sinyal.

Katlama işlemine devam edersek sıra, sağa doğru gitmemiz durumunda $\delta(t-T)$, sola doğru gitmemiz durumunda ise $\delta(t+T)$ sinyaline gelecektir. Nasıl olsa tüm sinyaller ile tek tek katlayacağımıza göre hangi sinyal ile önce katladığımızın hiçbir önemi yoktur. Ben nedensel bir insan olduğum için $\delta(t-T)$ sinyaline öncelik vereceğim. Acaba $\delta(t-T)$ sinyali ile $h(t)$ sinyalini katladığımızda ortaya ne çıkacaktır? $\delta(t-T)$ sinyalini T kadar sola kaydırmamız durumunda $\delta(t)$ sinyalini elde ederiz. Bu sinyali $h(t)$ sinyali ile katlar isek $y_0(t)$ sinyalini elde ederiz. Şimdi bu sinyali T kadar sağa kaydırmamız durumunda Şekil 3.16'da verilen katlama sonucunu elde ederiz. Katlama işleminin zamanda değişmezlik özelliğinden faydalandığımızı hatırlatmak isterim. Bu sinyali $y_{-T}(t)$ olarak adlandırmayı uygun buluyorum.



Şekil 3.16 Şekil 3.14’te verilen $h(t)$ sinyalinin $\delta(t-T)$ sinyali ile katlanması sonucu ortayan çıkan sinyal.

Benzer şekilde $x(t) = \cdots + \delta(t-2T) + \delta(t-T) + \delta(t) + \delta(t+T) + \delta(t+2T) + \cdots$ sinyalinin tüm bileşenleri için sırasıyla $y(t) = \cdots + h_{2T}(t) + h_T(t) + h_0(t) + h_{-T}(t) + h_{-2T}(t) + \cdots$ sinyalini elde ederiz. $y(t)$ sinyali Şekil 3.17’de verilmiştir.



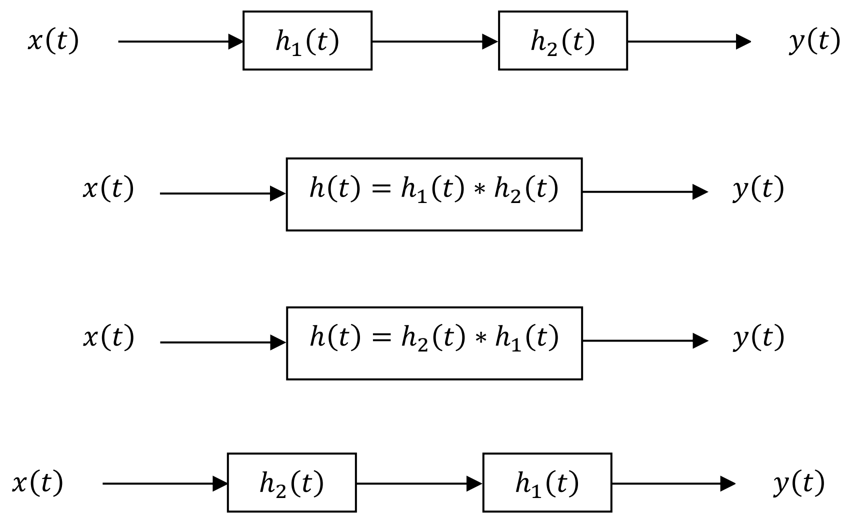
Şekil 3.17 Şekil 3.14’te verilen $h(t)$ sinyalinin $x(t)$ sinyali ile katlanması sonucu ortayan çıkan sinyal.

3.4.3 Birleşme özelliği (Assocative Property)

Katlama işlemi için geçerli olan bir diğer basit ama etkin özellik Eşitlik 3.23’te verilen birleşme özelliğidir.

$$y(t) = x(t) * \big(h_1(t) * h_2(t)\big) = \big(x(t) * h_1(t)\big) * h_2(t) = x(t) * h(t) \qquad (3.23)$$

Bu özellik, Şekil 3.18’de (katlamanın birleşme özelliğinde) gösterildiği üzere birbirine (cascade) seri bağlı iki doğrusal zamanda değişmez sistemin aslında tek bir sistem altında birleştirilebileceğini göstermektedir. Aynı zamanda birden fazla doğrusal zamanda değişmez sistem bulunduğunda ilk sistemin çıkışının ikinci sistemin girişi olarak incelenmesini kolaylaştıracaktır. Bir önceki bölümde incelendiği üzere yer değiştirme ve dağılma özellikleri ile birlikte incelemek mümkündür.



Şekil 3.18 Katlamanın birleşme özelliği.

3.5 Doğrusal Zamanda Değişmez Sistem Özellikleri

Bu bölümde sürekli zaman doğrusal zamanda değişmez sistemlerine ait özellikler açıklanacak, bu sistemlere ait matematiksel tanımlar verilecek ve en önemlisi bu modeller ile bu modellerin gerçek dünyada ifade ettiği sistemler arasında bir köprü kurulacaktır.

3.5.1 DZD bellekli ve belleksiz sistemler [LTI Systems with and without memory (memoryless)]

Bir sistemin çıkışı, girişin SADECE o andaki değerlerine bağlı ise bu sisteme belleksiz sistem denir. Bu durumda doğrusal zamanda değişmez sisteme ait çıkış-giriş ilişkisi Eşitlik 3.24'te verildiği gibi bir biçimde olmalıdır. Burada a sabit bir katsayı, dürtü tepkisi ise giriş sinyalinin sadece o anki değerlerinden oluşmalıdır.

$$y(t) = ax(t) \tag{3.24}$$

Eşitlik 3.24'te verilen sistem en basit belleksiz sisteme güzel bir örnektir. Sistem çıkış sağlamak için girişin sadece o andaki değerine ihtiyaç duyar, şimdi aşağıdaki denkleme bakmadan Eşitlik 3.24 ile verilen sistem için sistemin dürtü tepkisini yazmanız beklenmektedir. Doğrusal zamanda değişmez bir sistem için dürtü tepkisi, giriş sinyalinin bir dürtü olduğu durumdur. Bu durumda birim dürtü yerine giriş sinyalini yazdığımızda, dürtü tepkisi çıkış sinyalini verecektir.

$$h(t) = a\delta(t) \tag{3.25}$$

3.5.2 DZD Nedensel sistemler (LTI, Casual systems)

Eğer bir sistemin çıkışı, girişin o an dâhil olmak üzere önceki değerlerine bağlı ise sisteme nedensel (casual) sistem denir. Bu durumda Eşitlik 3.25'te belleksiz sistemler için verdiğimiz dürtü tepkisi tanımını nedensel sistemler için yapabilir misiniz?

$$h(t) = 0, \; t < 0 \tag{3.26}$$

Eşitlik 3.26'da verilen sistemlere sağa yaslı (right sided) sistemler denir. Bunun nedeni sistemin nedensel olabilmesi için dürtü tepkisinin sadece 0 ve sıfırdan sonraki değerleri içermesi gerekliliğidir.

İSPAT:

Doğrusal zamanda değişmez bir sistem için katlama integralini alır isek:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

Sistemin nedensel olabilmesi için çıkış sinyalinin, giriş sinyalinin sadece o an ve o andan önceki değerlerine bağlı olması gerekir. Bu durumda integralin sınırları negatif değerler içeremez. Aksi takdirde çıkış sinyalinin t anındaki değeri için giriş sinyalinin t anından sonraki değerlerine $(t+\tau)$ ihtiyaç duyulur.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \tag{3.27}$$

Eşitlik 3.27'den açıkça görülebileceği üzere nedensel DZD bir sistem için

$$h(\tau) = 0, \qquad \tau < 0$$

olmalıdır. İSPAT burada bitirilemez. Peki bu durumda yer değiştirme özelliği hala daha geçerli midir?

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \neq \int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \tag{3.28}$$

Şüphesiz, Eşitlik 3.28'in ikinci kısmı, giriş sinyalinin sadece zaman için sıfırdan büyük olduğu anların kullanımını gerektirmektedir. Bu nedenle yer değiştirme özelliği nedensel DZD sistemler için bu şekilde tanımlanamaz. PEKİ nasıl tanımlanır? Basit bir değişken dönüşümü ile sonucu sizin bulmanızı bekliyorum. Bir ipucu daha vereyim, önce $u = (t-\tau)$ değişken dönüşümü yapıp daha sonra $(\tau) = u$ değişken dönüşümü yaptığınızda Eşitlik 3.29'a ulaşmanız gerekir.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \tag{3.29}$$

Eşitlik 3.29'u incelediğimizde harcadığınız mürekkep ve kâğıda değdiğini göreceksiniz. Çıkış sinyalinin t anındaki değerini elde edebilmek için giriş sinyalinin t anından önceki tüm değerlerini kullanmamız gerektiği görülmektedir ki, bu tam olarak nedensel sistemin tanımı ile örtüşmektedir. Bir kez daha matematik olayın doğasını, fiziğini anlamamız için mükemmel bir araç olmuştur. Nedensel DZD sistemler için çıkış sinyalinin o anki değerini elde edebilmemiz için giriş sinyalinin sadece o an ve/veya o andan önceki değerlerini kullanmamız gerekmektedir. Giriş sinyalinin t anından sonraki değerlerini kullanıyor olsa idik sistemi nedensel olarak adlandıramazdık. Tüm bu tartışmalarımız sırasında nedensel DZD bir sistem ile bu sisteme ait dürtü tepkisi sinyalinin nedensel olmasının aynı anlama geldiği açıktır. Bu durum, DZD sistemler için dürtü tepkisi sinyalinin sistemi betimlemek için tek başına yeterli olmasının doğal bir sonucudur.

3.5.3 DZD Kararlı sistemler (LTI Stable systems)

"2.1.5 Kararlı Sistemler" bölümüne geri dönersek, kararlı sistemler için: Sınırlı bir girişe sınırlı bir çıkış veren sistemlere kararlı sistemler denir. Bu tanım, bizi dürtü tepkisi açısından acaba nereye götürür?

$$|x(t)| < S \; tüm \; t \; değerleri \; için \tag{3.30}$$

Giriş sınırlı bir değere sahip ise tüm zaman değerleri için giriş sinyali sınırlı bir S değerinden küçük olmalıdır. Bu durumda katlama integralinin her iki tarafının mutlak değerini alırsak:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau \right| \tag{3.31}$$

Eşitlik 3.31 üzerinde üçgen eşitsizliğini uygular isek:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|\, d\tau \tag{3.32}$$

Giriş sinyalinin tüm değerleri S'den küçük olduğuna göre ve S bir sabit olduğuna göre integral dışına çıkarılabilir.

$$|y(t)| \leq S \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \tag{3.33}$$

Kararlı bir sistem, sınırlı bir girişe sınırlı bir çıkış vereceğinden Eşitlik 3.34 sağlanmalıdır. Diğer bir deyişle DZD bir sistem için; sınırlı bir girişin sınırlı bir çıkış verebilmesi için dürtü tepkisinin mutlak integrallenebilir (toplanabilir) (absolutely integrable) olması, yani Eşitlik 3.34'ü sağlaması gerekir.

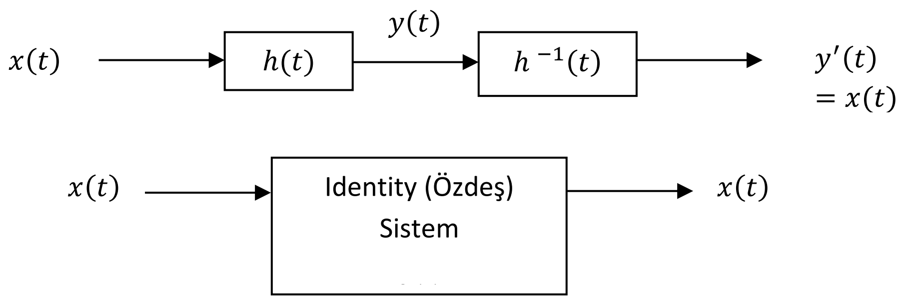
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \; < \infty$$

(3.34)

DZD bir sistemin sadece dürtü tepkisine bakarak kararlılığına karar verebilmek şaşırtıcı olmamalıdır; ancak acaba sınırlı bir giriş nasıl olur da sınırlı olmayan bir çıkış sinyali üretebilir? Bu durumu anlamak için Eşitlik 3.34 incelenmelidir. Eşitlik 3.34 sağlanmadığında, giriş sınırlı bile olsa çıkış sınırlı olmayacaktır. Aklınıza gelen böyle en az bir sistem var mıdır?

3.5.4 DZD Tersinir sistemler (LTI Inverse systems)

Doğrusal zamanda değişmez bir sistemin tersinin olması; ilk sisteme seri bağlanması durumunda ikinci sistemin çıkışının, ilk sistemin girişi ile aynı olması durumunda gerçekleşir. Şekil 3.19'da doğrusal zamanda değişmez bir tersinir sistem gösterilmektedir.



Şekil 3.19 DZD tersinir sistem.

Katlama işleminin birleşme özelliğini kullanırsak,

$$y'^{(t)} = x(t) = \big(x(t) * h(t)\big) * h^{-1}(t) = y(t) * h^{-1}(t) = x(t) * \big(h(t) * h^{-1}(t)\big) = x(t) * \delta(t)$$

(3.35)

Bu durumda $h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$ vermelidir. Diğer bir deyişle bir sistemin tersini aradığımızda elimizdeki sistemin dürtü tepkisini ne ile katlamalıyım ki birim dürtü fonksiyonunu elde edeyim sorusunun cevabını aramakta oluruz. Hemen ifade etmeliyim ki zaman bölgesinde çözümü kolay bir soru değildir. Frekans bölgesinin kullanışlı olduğu bir diğer alan da tersinir sistemlerdir; ancak bunun için sonraki bölümleri okumak gerekecektir.

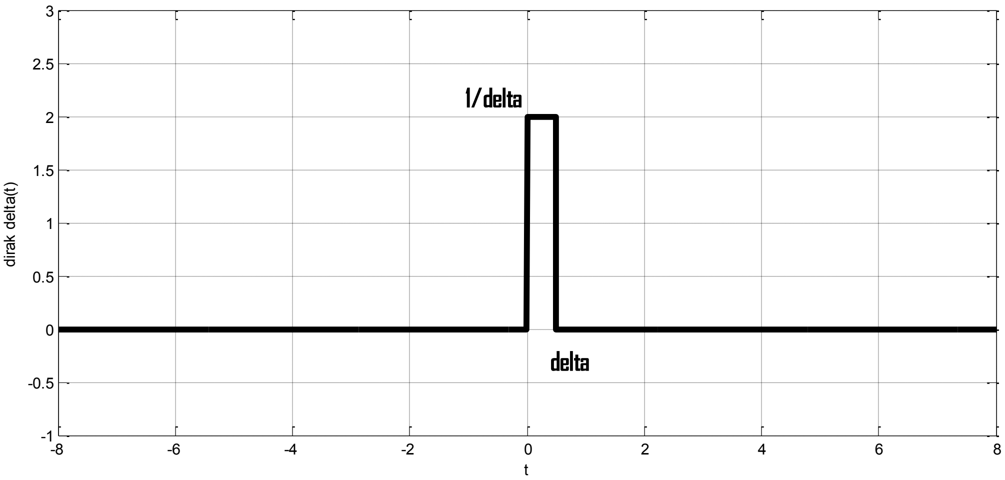
3.6 Kendini birim dürtü zanneden sinyaller (Singularity functions)

Doğrusal zamanda değişmez sistemler ve bu sistemlerin ayrılmaz bir bütünü olan katlama integrali denince akla ilk gelen birim dürtü fonksiyonu olmalıdır. "1.2.1.2 Sürekli zamanda birim dürtü ve birim basamak fonksiyonları" bölümünde detaylı anlatıldığı üzere sürekli zaman birim dürtü sinyali çoğu zaman kolaylıkla anlaşılamayan ve üzerinde çok hata yapılan sinyallerden biridir. Örnek olarak $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonunu ele alalım. Çok iyi biliyoruz ki herhangi bir sinyali birim dürtü fonksiyonu ile katladığımızda yine aynı sinyali (ya da fonksiyonu) elde ederiz. Bu durumda birim dürtü sinyali ile birim dürtü sinyalini katladığımızda gene birim dürtü sinyalini elde edeceğimiz açıktır.

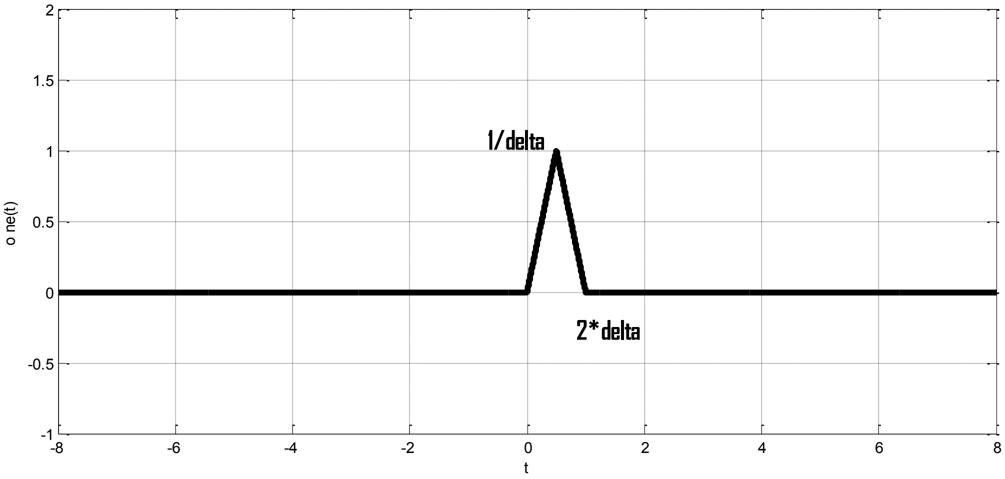
$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t) \tag{3.36}$$

Bu durumda acaba $\delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ sonucunda ne elde ederiz? Şekil 3.20.a'da $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonu gösterilmektedir. Bu bölümün sonuna geldiğimizde bu sinyali kendi ile katlamayı başarabileceğinizden eminim. Ben yine de sonucu Şekil 3.20.b'de vermeyi uygun buluyorum.



a.



b.

Şekil 3.20 a. $\delta_\Delta(t)$ sinyali ve b. $o_{ne}(t) = \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ kendini birim dürtü zanneden sinyal.

Katlama sonucunda çıkan sinyalden açıkça görüleceği üzere $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonunun kendi ile katlanması sonucunda $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonu ortaya çıkmamıştır.

$$o_{ne}(t) = \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t) \neq \delta_\Delta(t)$$

(3.37)

Bu durumda $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonunun sürekli zaman birim dürtü fonksiyonu olmadığı fikri mi ortaya atılmalıdır? Bu gerçekten karışık bir durumdur, üstelik çoğu öğrencinin kesikli zamanda inceleyelim, öyle anlarız, öyle çözeriz yaklaşımı yetersiz kalacaktır (*İsterseniz bir de siz deneyin*.). Bu durum sürekli zaman fonksiyonlarına özel bir durumdur. Özel durumlar, özel incelemeler gerektirir. Malum eşitlik sadece limit durumda geçerlidir.

$$\lim_{\Delta\to 0}\big(\delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)\big) = \lim_{\Delta\to 0} o_{ne}(t) = \lim_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

(3.38)

Eşitlik 3.38, bir basamak daha ileri götürülebilir. $\delta_\Delta(t)$ fonksiyonu bu incelemenin konusu olan tek fonksiyon değildir, limit durumda $\delta(t)$ fonksiyonuna dönüşen tüm fonksiyonları (örneğin $o_{ne}(t)$) "kendini birim dürtü zanneden" sinyaller olarak adlandırabiliriz. Bizim için önemli olan limit durumda Eşitlik 3.38'in varlığıdır. Detaylı tartışma ve inceleme matematik literatüründe "*Distribution Theory and Transform Analysis*" ve "*Generalised Functions*" başlıkları altında yaygın olarak bulunabilir.