HAFTA 10: SÜREKLİ ZAMAN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

CONTINIOUS TIME FOURIER TRANSFORM

İçindekiler

BÖLÜM 5: SÜREKLİ ZAMAN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

CONTINUOUS TIME FOURIER TRANSFORM

Bir durum karşısında mümkün olabilecek tüm olasılıkları düşünebilmek, hatta hesaplayabilmek son derece önemlidir. Bölüm 4'te detaylı bir biçimde anlatılan Fourier serileri, sürekli zaman periyodik sinyallerin gösterimi için geçerli ise acaba sürekli zaman periyodik olmayan (aperiyodik kavramı periyodik olmayan kavramı ile birlikte kullanılacaktır) sinyaller için acaba Fourier serileri hesaplanabilir mi? Bu sorunun cevabı kısa ve nettir. Hayır, çünkü Fourier serisi analizi belli bir T temel periyodu için yapılmaktadır. Bu durumda aperiyodik sürekli zaman sinyalleri için Fourier serisi gösterimi mümkün değildir.

Periyodik olmayan sürekli zaman sinyalleri için acaba başka bir gösterim (sentez, açılım) mümkün müdür?

5.1 Sürekli zaman periyodik olmayan (aperiyodik) sinyallerin Fourier dönüşümü

Bölüm 4, Örnek 4.2'ye geri döner isek:

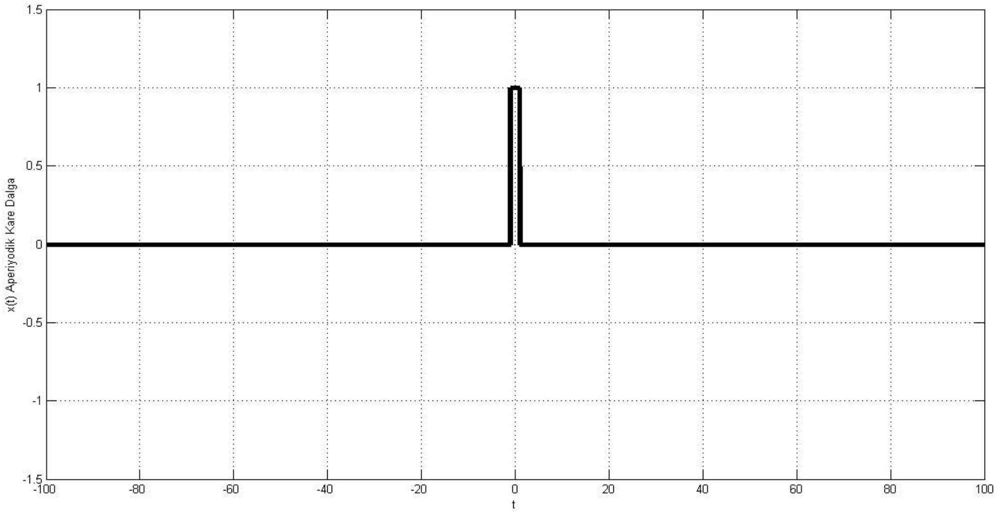
Temel periyodu T olan, 1 değerini *$2T_1$* süresi boyunca alan bir kare dalganın analitik denklemini ifade etmiş idik.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T_1 < t < T_1 \\ 0, & -{}^{T}\!/_{2} < t < -T_1 \ ve \ T_1 < t < {}^{T}\!/_{2} \end{cases} \qquad (5.1)$$

Bu kare dalganın Fourier serisi katsayılarını hiçbir basamak atlamadan, sabırla Eşitlik 4.18'de ifade etmiştik. Şimdi aynı eşitliği tekrar hesaplayalım. Tek bir farkla; T temel periyodu boyunca alacağımız integrali Şekil 5.1'de verilen aperiyodik kare dalga için hesapladığımızı varsayarak:

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt} \qquad (5.2.a)$$

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt} \qquad (5.2.b)$$



Şekil 5.1 Sürekli zaman aperiyodik kare dalga $x(t)$.

Bu durumda, Eşitlik 5.2.b, Eşitlik 5.3.a halini alır.

$$\boldsymbol{a_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\Omega t}\Big|_{\Omega = k\Omega_0} \, dt}$$

(5.3.a)

Limit durumda; temel periyot T sonsuza giderken ($T \to \infty$), diğer bir deyişle periyodik kare dalganın, sadece tek bir periyodu kalıp, sinyal periyodik olmayan bir hal alırken a_k Fourier serisi katsayıları limit durumda büyük bir sayıya (T) bölündüğünden (Bakınız Eşitlik 5.3.a) $a_k \to 0$, $\lim\limits_{T\to\infty, a_k \to \mathbf{0}} a_k T$ belirsiz bir değere ve $k\Omega_0 \to \Omega$ ise artık belirli bir temel frekansın harmonikleri yerine, sonsuz küçük aralıklarla $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, sürekli bir Ω değişkenine dönüşür. İşte bu limit durumundaki belirsizliğe artık yeni bir tanım yapmanın zamanı gelmiştir.

Eşitlik 5.3.a'da kaldığımız yerden devam edersek Eşitlik 5.4 tanımına (eşitliğine, denkliğine) ulaşmış oluruz.

$$\boldsymbol{\lim_{T\to\infty} a_k T = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} \, dt}$$

(5.3.b)

$$\boldsymbol{X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} \, dt}$$

(5.4)

Bu zarif matematiksel incelemenin sonucunda Eşitlik 5.4'ün sol tarafının neden $X(j\Omega), \Omega = 2\pi f$, f frekans olmak üzere olarak adlandırıldığını açıklamakta fayda vardır. Öncelikle $x(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü alındığı için dönüşüm bölgesindeki sinyal X olarak adlandırılmıştır. Tıpkı bilgisayar programlama dillerinde "case sensitive" değişkenlerde olduğu gibi (x ve X) farklı fonksiyonlara karşılık gelmektedir. Yumuşak parantez kullanılması $X(j\Omega)$ fonksiyonunun Ω'nın sürekli bir fonksiyonu olduğu (Ω, harfinin kullanılması frekansın kaynaklandığı zaman sinyalinin (t) sürekli olduğu), j kompleks ifadesi ise $X(j\Omega)$ fonksiyonunun karmaşık olabileceği (olmak zorunda olmamakla birlikte) anlamına gelmektedir. Yine hiçbir karakter, sembol, harf boşa harcanmamış, hepsi fiziksel bir gerçeği ifade etmek üzere kullanılmıştır.

Farklı kitap ve literatür kaynaklarında $X(j\Omega)$ yerine $X(\Omega)$ ya da $X(f)$ ifadelerinin kullanıldığı görülebilir. Mevcut gösterim süper set olup diğer gösterimleri kapsadığından tercih edilecektir.

Sürekli zaman periyodik olmayan sinyallerin Fourier dönüşümü gösterimini tamamlamak ancak dönüşüm çiftinin verilmesi ile tamamlanabilir. Eşitlik 5.5'te sunulan ilk denklem ispatı verilen analiz (Fourier Dönüşümü) denklemi, ikinci verilen denklem ise sentez (ters Fourier dönüşümü) denklemi olarak adlandırılmaktadır. $d\Omega = 2\pi\, \mathrm{df}$ olacağından sentez denkleminin açısal frekans yerine çizgisel frekans ile verilmesi durumunda (Proakis,2007) $1/2\pi$ katsayısı bulunmayacaktır.

$$\boldsymbol{X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t}\, dt}$$

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t}\, d\Omega} \tag{5.5}$$

Fourier dönüşümü çiftinin verilmesi ile sürekli zaman periyodik olmayan sinyallerin Fourier dönüşümü gösterimi tamamlanmış olur. Akılda kalan soru ise "Acaba sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier dönüşümü var mıdır?" şeklinde olacaktır/olmalıdır.

5.2 Sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier dönüşümü

Matematiksel incelemeler çoğu zaman bizi farklı yorumlara götürebilir. Örneğin artık içinde temel periyod ifadesi T bulunmayan bir eşitlik için (Eşitlik 5.5) sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier serisi açılımına karşılık gelebilecek (diğer bir deyişle periyodik sinyaller için Fourier serisi açılımı ile Fourier dönüşümü arasında bir köprü, bir ilişki kurabilecek) bir Fourier dönüşümü bulunabilir mi? Eşitlik 5.5 ile bir yere varamayacağınız açıktır.

Matematik biliminin gizemli fonksiyonu birim dürtü ve Fourier dönüşümünün Fourier serileri ile ifade edilebileceği sürekli zaman periyodik sinyallere bu defa zaman değil, frekans bölgesi gösteriminden başlayarak yola çıkalım. Fourier dönüşümü Eşitlik 5.6'da verilen fonksiyonu ele alalım.

$$\boldsymbol{X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)} \tag{5.6}$$

Bu sinyalin ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesine geçmek istersek:

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\, d\Omega}$$

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)e^{j\Omega t}\, d\Omega}$$

Birim dürtü fonksiyonunun sadece $\Omega = \Omega_0$ noktasında değeri olacağı gerçeğinden hareketle

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t} \tag{5.7}$$

olarak hesaplanır. Bu durumda Fourier dönüşümü Eşitlik 5.6 ile verilen fonksiyonun zaman bölgesinde periyodik bir fonksiyon olduğu hesaplanmış olur. Fourier dönüşümünün doğrusal olduğundan hareketle, a_k'lar tamamen birer sabit olmak üzere

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t}$$

$$x'(t) = a_k e^{jk\Omega_0 t}$$

Eşitlik 5.8'de verildiği üzere yeni bir $x(t)$ fonksiyonu tanımlarsak:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k\, e^{jk\Omega_0 t} \tag{5.8}$$

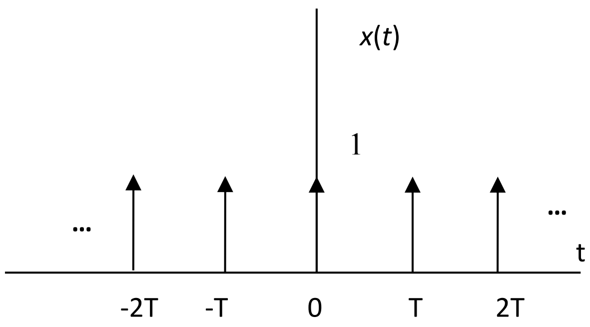
Fourier dönüşümünün doğrusallık özelliğinden dolayı Eşitlik 5.8'de verilen $x(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü Eşitlik 5.9'da verildiği üzere bulunur. Eşitlik 5.8 ile verilen $x(t)$ fonksiyonunun; herhangi bir sürekli zaman periyodik sinyalin Fourier serisi açılımına karşılık geldiği gerçeğinden hareketle: Sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier dönüşümünün, Eşitlik 5.9 ile verilen Fourier serisi katsayıları ile hesaplanabileceğini ispatlamış oluruz.

$$\boldsymbol{X(j\Omega)} = \sum_{\boldsymbol{k}=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{2\pi} a_k \boldsymbol{\delta(\Omega - k\Omega_0)}$$

(5.9)

5.3 Sürekli zaman periyodik ve sürekli zaman aperiyodik sinyallerin Fourier dönüşümüne güzel bir örnek

Şekil 5.2'de verilen birim dürtü katarına ait Fourier dönüşümünü hesaplayınız.



Şekil 5.2. Birim dürtü katarı.

Şekil 5.2'de verilen birim dürtü katarının $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, sürekli zaman periyodik bir sinyal olduğundan hareketle, Eşitlik 5.5 Fourier dönüşümü denklemine başvurmadan önce Fourier dönüşümünün hesaplanabilmesi için Fourier serisi katsayılarına ihtiyacımız olduğunu biliyoruz.

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t}\, dt}$$

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_0 t}\, dt}$$

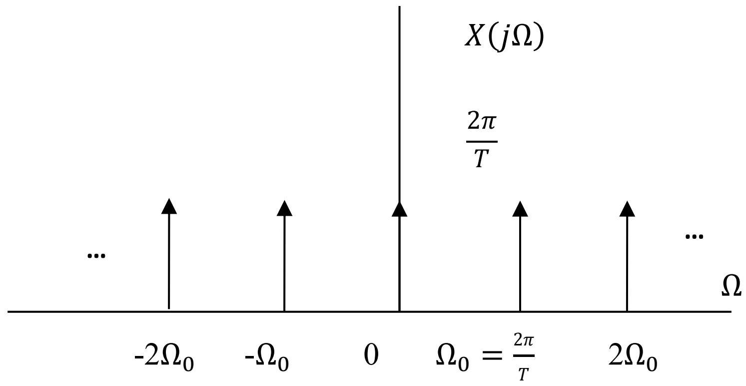
$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, dt = \frac{1}{T}, \forall k}$$

(5.10)

Periyodik sinyallerin Fourier dönüşümü için:

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{2\pi}{T})\delta(\Omega - k\Omega_0) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \qquad (5.11)$$

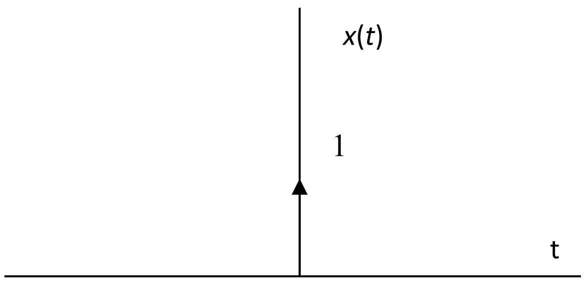


Şekil 5.3. Birim dürtü katarına ait Fourier dönüşümü: Yine darbe katarı.

Eşitlik 5.11 ile hesaplanan birim dürtü katarına ait Fourier dönüşümü Şekil 5.3'te sunulmuştur. Tekrar hatırlatalım: Periyodik sinyallere ait FD (Fourier Dönüşümü) ancak FS (Fourier Serileri) katsayıları ile hesaplanabilir. Şimdi, Şekil 5.4 ile verilen aperiyodik birim dürtü için FD hesaplayalım.

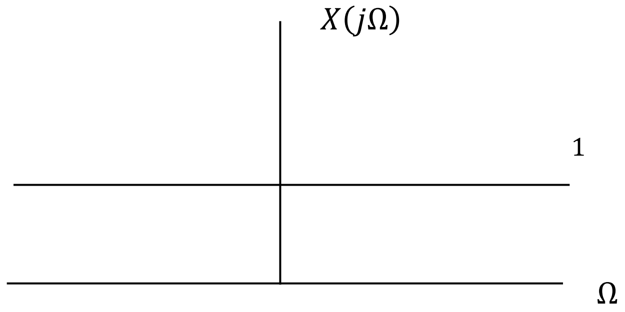
$$\boldsymbol{X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\,dt}$$

$$\boldsymbol{X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\Omega t}\,dt = 1} \qquad (5.12)$$



Şekil 5.4 Birim dürtü katarı.

Şekil 5.5, Şekil 5.4'teki $x(t)$ sinyalinin FD'sini göstermektedir.



Şekil 5.5 Birim dürtü katarına ait Fourier dönüşümü.

Şekil 5.3 ve Şekil 5.5 ile verilen sırasıyla periyodik ve aperiyodik dürtü sinyallerine ait Fourier dönüşümlerinin fiziksel anlamlarını inceleyelim. Zaman bölgesinde birim dürtülerin arası açıldıkça (T, temel periyod büyüdükçe), frekans bölgesinde birim dürtülerin birbirine yaklaştığını ve zaman bölgesinde sinyalin aperiyodik olması durumunda frekans bölgesinde birim dürtülerin artık bir süreklilik içererek $X(j\Omega) = 1$ halini aldığı görülmektedir.

Bir diğer fiziksel yorum ise DZD (LTI) sistemlerin zaman bölgesinde neden birim dürtü fonksiyonuna verdikleri tepki ($h[n]$) ile ifade edilebildiğinin açıklamasıdır. DZD sistemin girişine verilen birim dürtü fonksiyonu frekans bölgesinde tüm frekansları kapsadığından $X(j\Omega) = 1$, DZD sistemin frekans bölgesinin tamamı için verdiği tepki $H(j\Omega)$ hesaplanmış olur. Fourier dönüşümünün özellikleri Fourier serilerinin özellikleri ile bire bir benzerlik gösterdiğinden sadece önceki bölümde ispatlanmayan Katlama Özelliği sunulacaktır.

5.4 Katlama özelliği, DZD sistemlerin frekans bölgesi gösterimi

DZD sistemlere geri döndüğümüzde ilk aklımıza gelen katlama integrali Eşitlik 5.13 ile verilmektedir.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad (5.13)$$

Diğer yandan çıkış sinyali $y(t)$'nin, Eşitlik 5.14 ile Fourier dönüşümünü hesaplarsak,

$$\boldsymbol{Y(j\Omega) = \mathrm{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\Omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-j\Omega t}\,dt} \qquad (5.14)$$

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{j\Omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\mathbf{t}-\boldsymbol{\tau})\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\Omega t}} \mathbf{dt} \right] \boldsymbol{d\tau} \tag{5.15}$$

Zamanda kayma özelliğinden köşeli parantezin içini Eşitlik 5.16'da verildiği şekilde düzenleyebiliriz.

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{j\Omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{H}(\boldsymbol{j\Omega}) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\Omega\tau}}\, \boldsymbol{d\tau} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{j\Omega}) \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\Omega\tau}}\, \boldsymbol{d\tau} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{j\Omega}) \boldsymbol{X}(\boldsymbol{j\Omega}) \tag{5.16}$$

Eşitlik 5.17 ile verilen katlama özelliği, iki sinyalin zaman bölgesinde katlanması ile bu iki sinyalin Fourier dönüşümlerinin çarpılması arasında bir ilişki sunmaktadır. Sistemin dürtü tepkisinin Fourier dönüşümü olan frekans tepkisi $H(j\Omega)$, DZD sistemin herhangi bir Ω frekansında nasıl davranacağını belirler.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t) \rightarrow H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \tag{5.17}$$

Katlama özelliği, sadece kuramsal doğrusal ve zamanda değişmez sistem analizinde muazzam bir öneme sahip olmakla kalmayıp, gerçek zaman uygulamalarında katlama işlem yükünün çok yüksek olması nedeniyle tercih edilen bir yöntem olarak literatürdeki yerini almıştır.

5.5. Bir bakışta temel Fourier dönüşümü çiftleri

$\boldsymbol{X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t}\, dt}$ (Sürekli zaman, aperiyodik sinyallerin FD)
$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$ (Sürekli zaman, periyodik sinyallerin FD)

$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t}\, d\Omega}$ (Sürekli zaman ters FD)

Sinyal	**Fourier Dönüşümü**
$\cos \Omega_0 t$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)$
$\sin \Omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)$
$e^{j\Omega_0 t} = \cos \Omega_0 t + j \sin \Omega_0 t$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0) + \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)$ $= 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0)$
$x(t) = 1$	$2\pi\, \delta\left(\Omega - \Omega_0\big\|_{\Omega_0=0}\right) = 2\pi\, \delta(\Omega)$
$x(t) = \begin{cases} 1, \|t\| < T_1 \\ 0, \ \|t\| > T_1 \end{cases}$ (*)	$\frac{2\sin \Omega T_1}{\Omega}$
$\delta(\mathrm{t})$	1

Sizce hangi sinyallerin Fourier dönüşümü yanında Fourier serisi katsayıları var? Tabii ki, periyodik olan sinyallerin. Peki, periyodik sinyallerin Fourier dönüşümünde neden birim dürtü fonksiyonu var? Periyodik sinyalleri güç ve enerji açısından inceleyiniz.

(*) Sizce x(t) ile verilen kare dalga periyodik midir? Periyodik kare dalganın Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

Düşünmeden öğrenmek, vakit kaybetmektir. KONFÜÇYÜS