2.7. Analitik ve Harmonik Fonksiyonlar

Tanım 1. $f(z)$ nin z_0 da $f'(z_0)$ türevi mevcut ve z_0 ın bir $\mathcal{D}_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ komşuluğundaki her noktada türevi varsa bu durumda f ye z_0 da analitiktir (veya holomorfiktir) denir.

Tanım 2. Kompleks düzlemin tamamında analitik olan bir fonksiyona tam fonksiyon denir.

Tanım 3. Eğer $f'(z_0)$ mevcut değil fakat z_0 ın komşuluğundaki en az bir noktada $f(z)$ analitik ise z_0 a f nin singüler (tekil) noktasıdır denir.

Tanım 4. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de bir bölgede sürekli ve h nın birinci ve ikinci mertebeden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli olsun. Eğer verilen bölgede

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0$$

Laplace denklemi sağlanıyorsa h fonksiyonuna bu bölgede harmoniktir denir.

Teorem 1. $u(x, y)$ bir (x_0, y_0) noktasının bir ε- komşuluğunda harmonik olsun. Bu durumda $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ bu komşulukta analitik olacak biçimde bir $v(x, y)$ harmonik eşlenik fonksiyonu vardır.

Soru 1. Aşağıdaki fonksiyonların hiçbir yerde analitik olmadığını gösteriniz.

a) $f(z) = xy + iy$

b) $f(z) = e^y(cosx + isinx)$

Çözüm. a) $f(z) = xy + iy$ fonksiyonu için $u(x, y) = xy$ ve $v(x, y) = y$ dir. Buradan $u_x = y$, $u_y = x$, $v_x = 0$ ve $v_y = 1$ bulunur. u ve v nin birinci mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut ve süreklidir.

$$u_x = v_y$$

ve

$$u_y = -v_x$$

Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanabilmesi için $y = 1$ ve $x = 0$ olmalıdır. Buradan f fonksiyonunun sadece $z_0 = 0 + 1.i = i$ noktasında türevinin var olduğu görülür. f nin z_0 noktası komşuluğunda türevi mevcut olmadığından f hiçbir yerde analitik değildir.

b) $f(z) = e^y(cosx + isinx)$ fonksiyonu için $u(x, y) = e^y cosx$ ve $v(x, y) = e^y sinx$ dir. Buradan $u_x = -e^y sinx$, $u_y = e^y cosx$, $v_x = e^y cosx$ ve $v_y = e^y sinx$ bulunur.

$$u_x = v_y$$

denkleminin sağlanabilmesi için

$-e^y sinx = e^y sinx$ ve her $y \in \mathbb{R}$ için $e^y > 0$ olduğundan $sinx = 0$ olmalıdır. Buradan

$x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ bulunur.

Benzer şekilde

$$u_y = -v_x$$

denkleminin sağlanabilmesi için $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ olmalıdır, dolayısıyla Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmadığından f hiçbir yerde analitik değildir.

Soru 2. Aşağıdaki fonksiyonların tam olduklarını gösteriniz.

a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

b) $f(z) = sinxcoshy + icosxsinhy$

Çözüm.

a) $u(x, y) = 3x + y$ ve $v(x, y) = 3y - x$ dir. Buradan,

$u_x = 3$, $u_y = 1$, $v_x = -1$, ve $v_y = 3$ bulunur. u ve v nin birinci mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut, sürekli ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığından f fonksiyonu her (x, y) noktasında türevlenebilirdir. Dolayısıyla tamdır.

b) $u(x, y) = sinxcoshy$ ve $v(x, y) = cosxsinhy$ dir. Buradan,

$u_x = cosxcoshy$, $u_y = sinxsinhy$, $v_x = -sinxsinhy$, ve $v_y = cosxcoshy$ bulunur. **(a)** şıkkındaki gibi f nin tam olduğu görülür.

Soru 3. Aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}^2$ de harmonik olduklarını gösterip harmonik eşleniklerini bulunuz.

a) $u(x,y) = 2x - 2xy$

b) $u(x,y) = sinhxsiny$

Çözüm. **a)** $u(x,y) = 2x - 2xy$ olmak üzere $u_x = 2 - 2y$, $u_{xx} = 0$, $u_y = -2x$ ve $u_{yy} = 0$ olur ve buradan

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

olup ikinci mertebeden türevler her yerde süreklidir, dolayısıyla u fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de harmoniktir.

u nun v harmonik eşleniği $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar, buradan

$$v_y = 2 - 2y \Rightarrow v(x,y) = 2y - y^2 + \varphi(x)$$

ve buradan

$$\varphi'(x) = v_x = -u_y = 2x \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + c$$

(c sabit) bulunur, dolayısıyla u nun v harmonik eşleniği

$$v(x,y) = 2y - y^2 + x^2 + c$$

olarak elde edilir.

b) $u(x,y) = sinhxsiny$ olmak üzere $u_x = coshxsiny$, $u_{xx} = sinhxsiny$, $u_y = sinhxcosy$ ve $u_{yy} = -sinhxsiny$ olur ve buradan

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

olup ikinci mertebeden türevler her yerde süreklidir, dolayısıyla u fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de harmoniktir.

u nun v harmonik eşleniği $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar, buradan

$$v_y = coshxsiny \Rightarrow v(x,y) = -coshxcosy + \varphi(x)$$

ve buradan

$$v_x = -u_y = -sinhxcosy + \varphi'(x) = -sinhxcosy$$

bulunur, dolayısıyla $\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c$ (c sabit) olmalıdır.

Buradan u nun v harmonik eşleniği

$$v(x, y) = -coshxcosy + c$$

olarak elde edilir.

Soru 4. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 3$ fonksiyonundan yararlanarak $f(i) = 0$ eşitliğini sağlayan analitik bir f fonksiyonu bulunabilir mi, araştırınız.

Çözüm. $u_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x$ ve $u_{xx} = 6x + 6$ olur. Ayrıca $u_y = -6xy - 6y$ ve $u_{yy} = -6x - 6$ dır.

O halde $u_{xx} + u_{yy} = 6x + 6 - 6x - 6 = 0$ olur ve böylece u harmoniktir. Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanması için $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ eşitliklerinin sağlanması gerekir. Buradan $u_x = v_y \Rightarrow v_y = 3x^2 - 3y^2 + 6x$ ve $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 6xy + \varphi(x)$ bulunur.

Benzer biçimde $u_y = -v_x \Rightarrow -6xy - 6y = -(6xy + 6y + \varphi'(x)) \Rightarrow \varphi'(x) = 0$ olup $\varphi(x) = c$ (c sabit) bulunur. Buradan $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 6xy + c$ elde edilir.

Dolayısıyla $f(i) = f(0 + i) = -3 + 3 + i(-1 + c) = 0$ ise burada $c = 1$ olmalıdır.

Soru 5. u ve v fonksiyonları bir $\mathcal{D}$ bölgesinde harmonik olsun. $f = u + iv$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik midir? Araştırınız.

Çözüm. $f = 1 + ix$ olsun. Bu durumda $u(x, y) = 1$ ve $v(x, y) = x$ olur. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve $v_{xx} + v_{yy} = 0$ olduğundan u ve v fonksiyonları tüm kompleks düzlemde harmoniktir. Fakat $u_y = 0$, $v_x = 1$ olup $u_y \neq -v_x$ olduğundan f fonksiyonu hiçbir yerde analitik değildir. Sonuç olarak u ve v fonksiyonlarının harmonik olması f nin analitik olmasını gerektirmez.

Soru 6. f, kompleks düzlemde analitik bir fonksiyon olsun.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f=u+iv$ diyelim. $|f|^2=u^2+v^2$ olur. Ayrıca f analitik olduğundan $u_x=v_y$ ve $u_y=-v_x$ Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır ve

u ve v harmonik olacağından $u_{xx}+u_{yy}=0$, $v_{xx}+v_{yy}=0$ eşitlikleri gerçeklenir.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2+v^2)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2+v^2)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(2uu_x+2vv_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2uu_y+2vv_y\right)\\
&= 2u_x^2+2uu_{xx}+2v_x^2+2vv_{xx}+2u_y^2+2uu_{yy}+2v_y^2+2vv_{yy}\\
&= 2u(u_{xx}+u_{yy})+2v(v_{xx}+v_{yy})+2u_x^2+2u_y^2+2v_x^2+2v_y^2\\
&= 2u_x^2+2v_x^2+2v_x^2+2u_x^2\\
&= 4(u_x^2+v_x^2)\\
&= 4|f'(z)|^2\end{aligned}$$

elde edilir.

Soru 7. $f_k(z)$ ($k=1,2,...,n$) fonksiyonları bir $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik olsun. Bu durumda

$$F(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|f_k(z)|^2$$

fonksiyonunun $\mathcal{D}$ de harmonik olması için gerek ve yeter şart her bir f_k fonksiyonunun $\mathcal{D}$ de sabit olmasıdır, gösteriniz.

Çözüm. $f_k(z)$ ($k = 1, 2, ..., n$) fonksiyonları $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \sum_{k=1}^{n} |f_k(z)|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f_k(z)|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} 4|f_k'(z)|^2\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned}\triangle F = 0 &\Leftrightarrow |f_k'(z)|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow f_k'(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow f_k \, sabit\end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırmalar

1) Aşağıdaki fonksiyonların harmonik olup olmadığını araştırınız.

$$\textbf{a)} u(x, y) = Re\left(\frac{2z}{z^3 - 1}\right) \qquad \textbf{b)} u(x, y) = -2xy$$

2) f, A kümesi üzerinde analitik olsun ve g fonksiyonu

$$g : A \to \mathbb{C}, \;\; g(z) = \overline{f(z)}$$

olarak tanımlansın. g fonksiyonunun ne zaman analitik olacağını araştırınız.

3) $f(z) = x^2 + axy + by^2$ fonksiyonunun sadece $a = 2i$, $b = -1$ değerleri için analitik olduğunu gösteriniz.