3.2. Kompleks Kuvvetler

$z \neq 0$ olmak üzere z nin bir kompleks kuvveti $z^c = e^{clogz}$ ile tanımlıdır. $logz$ yerine onun $Logz$ esas dalı alınırsa $(n = 0)$, $z^c = e^{cLogz}$ ye z^c nin esas değeri denir.

Soru 1. $(1+i)^i$ nin bütün değerlerini ve esas değerini bulunuz.

Çözüm.

1)

$$\begin{aligned}(1+i)^i &= e^{ilog(1+i)} \\ &= e^{i[ln|1+i|+iarg(1+i)]} \\ &= e^{i[ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2n\pi)]} \\ &= e^{iln\sqrt{2}}e^{-(\frac{\pi}{4}+2n\pi)} \\ &= e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\left[cos(ln\sqrt{2})+isin(ln\sqrt{2})\right], \ \ n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

2) $n = 0$ için esas değeri bulunur.

$$\begin{aligned}(1+i)^i &= e^{iLog(1+i)} \\ &= e^{i[ln|1+i|+iArg(1+i)]} \\ &= e^{i(ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})} \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}}e^{iln\sqrt{2}} \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}}\left[cos(ln\sqrt{2})+isin(ln\sqrt{2})\right]\end{aligned}$$

şeklindedir.

$Re(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4}}cos(ln\sqrt{2})$

$Im(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4}}sin(ln\sqrt{2})$ bulunur.

Soru 2. $z = re^{i\theta} \neq 0$ için z^i nin esas dalının denkleminin $z^i = e^{-\theta}[cos(lnr)+isin(lnr)]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$|z| > 0, -\pi < Argz < \pi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z^i &= e^{iLogz} \\ &= e^{i(ln|z|+iArgz)} \\ &= e^{i(lnr+i\theta)} \\ &= e^{ilnr-\theta} \\ &= e^{-\theta}[cos(lnr) + isin(lnr)] \end{aligned}$$

bulunur.

Soru 3. Aşağıdaki ifadelerin tüm değerlerini bulunuz.

1) $(-1)^{1/\pi}$

2) $(1-i)^{4i}$

Çözüm.

1)

$$\begin{aligned} (-1)^{1/\pi} &= e^{\frac{1}{\pi}log(-1)} \\ &= e^{\frac{1}{\pi}[ln|-1|+iarg(-1)]} \\ &= e^{\frac{1}{\pi}i(\pi+2n\pi)} \\ &= e^{(2n+1)i}, \ \ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

bulunur.

2)

$$\begin{aligned}(1-i)^{4i} &= e^{4ilog(1-i)} \\ &= e^{4i\left[ln|1-i|+i(-\frac{\pi}{4}+2n\pi)\right]} \\ &= e^{4i\left[ln\sqrt{2}+iarg(1-i)\right]} \\ &= e^{iln4-4(-\frac{\pi}{4}+2n\pi)} \\ &= e^{-4(-\frac{\pi}{4}+2n\pi)}\left(cos(ln4)+isin(ln4)\right), \quad n\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

bulunur.

Soru 4. $z \neq 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|z^\alpha| = |z|^\alpha$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}z^\alpha = e^{\alpha logz} &= e^{\alpha(ln|z|+iargz)} \\ &= e^{\alpha ln|z|}e^{i\alpha argz} \\ &= |z|^\alpha e^{i\alpha argz}\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$|z^\alpha| = \left||z|^\alpha e^{i\alpha argz}\right| = |z|^\alpha \left|e^{i\alpha argz}\right| = |z|^\alpha$$

bulunur.

Alıştırmalar

1) 2^i, $(-1)^{-i}$, $2^{\pi i}$, $(1+i)^{2+i}$ ifadelerinin bütün değerlerini bulunuz.

2) $z = x + iy$ olmak üzere

$$Re(z^i),\;\; Im(z^i),\;\; Re(i^z),\;\; |i^z|$$

sayılarının bütün değerlerini bulunuz.

3) $\left((1+i)^{(1+i)}\right)^{1+i}$ ifadesini basit hale getiriniz.