3.3. Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonlar ve Tersleri

$e^{ix} = cosx + isinx$ ve $e^{-ix} = cosx - isinx$ denklemlerinden yararlanılarak, her x reel sayısı için,

$$sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

olduğu açık olarak görülebilir. Bu nedenle z kompleks değişkenli sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını

$$sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

denklemleri ile tanımlamak pek doğaldır. $sinz$ ve $cosz$ fonksiyonları
e^{iz} ve e^{-iz} fonksiyonlarının lineer bileşimi oldukları için bu fonksiyonlar tam fonksiyonlardır.

$sinz$ nin tanımına göre ve $z = x + iy$ olmak üzere

$$\begin{aligned} sinz &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= sinx\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + icosx\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \\ &= sinxcoshy + icosxsinhy \end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde,

$$cosz = cosxcoshy - isinxsinhy$$

olduğu görülür.

Diğer dört trigonometrik fonksiyon, sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden aşağıdaki biçimde bilinen genel bağıntılarla tanımlanabilir:

$$tanz = \frac{sinz}{cosz}, \quad cotz = \frac{cosz}{sinz},$$

$$secz = \frac{1}{cosz}, \quad cscz = \frac{1}{sinz}.$$

Soru 1. $sinz = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm.

$$sinz = sinxcoshy + icosxsinhy$$

olduğundan

$$sinz = sinxcoshy + icosxsinhy = 2$$

ve buradan

1)$sinxcoshy = 2$ ve 2)$cosxsinhy = 0$ olmalıdır.

Buna göre (2) denkleminde a) $cosx = 0$ veya $sinhy = 0$ olur.

a) $cosx = 0$ olsun. Bu durumda $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$ bulunur. Bulunan değer (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)coshy = 2 \Rightarrow (-1)^k coshy = 2, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $k = 2n, \ \ n \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. Buradan $coshy = 2$ elde edilir.

$$\begin{aligned} coshy = 2 &\Rightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 2 \\ &\Rightarrow e^y + e^{-y} = 4 \end{aligned}$$

olur ve elde edilen denklem çözülerek

$$e^y = 2 \mp \sqrt{3} \Rightarrow y = ln(2 \mp \sqrt{3})$$

bulunur. Buradan çözüm kümesi

$$\{(x, y) : x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, y = ln(2 \mp \sqrt{3}), \ \ n \in \mathbb{Z}\}$$

olarak elde edilir.

b) $sinhy = 0$ olsun. Bu durumda $y = 0$ olur ve bulunan bu değer (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$sinxcosh0 = 2 \Rightarrow sinx = 2$$

elde edilir. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $1 \leq sinx \leq 1$ olduğundan $sinx = 2$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{R}$ sayısı yoktur. Bu durumda çözüm yoktur.

Sonuç olarak $sinz = 2$ denkleminin çözüm kümesi

$$\{(x, y) : x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, y = ln(2 \mp \sqrt{3}),\ \ n \in \mathbb{Z}\}$$

olarak elde edilir.

Soru 2. $cosz = \sqrt{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm.

$$cosz = cosxcoshy - isinxsinhy$$

olduğundan

$$cosz = cosxcoshy - isinxsinhy = \sqrt{2}$$

ve buradan

1) $cosxcoshy = \sqrt{2}$ veya 2) $sinxsinhy = 0$ olmalıdır.

Buna göre (2) denkleminde a) $sinx = 0$ veya b) $sinhy = 0$ olur.

a) $sinx = 0$ olsun. Bu durumda $x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. Bu değer (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$cos(k\pi)coshy = \sqrt{2} \Rightarrow (-1)^k coshy = \sqrt{2}$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için $k = 2n,\ \ n \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} coshy = \sqrt{2} &\Rightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sqrt{2} \\ &\Rightarrow e^y + e^{-y} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

olur ve elde edilen denklem çözülerek

$$e^y = \sqrt{2} \mp 1 \Rightarrow y = ln(\sqrt{2} \mp 1)$$

bulunur. Buradan çözüm kümesi

$$\{(x,y) : x = 2n\pi, y = ln(\sqrt{2} \mp 1),\ \ n \in \mathbb{Z}\}$$

olarak elde edilir.

b) $sinhy = 0$ olsun. Bu durumda $y = 0$ olur ve bulunan bu değer (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$cosxcosh0 = \sqrt{2} \Rightarrow cosx = \sqrt{2}$$

elde edilir. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $1 \leq cosx \leq 1$ olduğundan $cosx = \sqrt{2}$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{R}$ sayısı yoktur. Bu durumda çözüm yoktur.

Sonuç olarak $cosz = \sqrt{2}$ denkleminin çözüm kümesi

$$\{(x,y) : x = 2n\pi, y = ln(\sqrt{2} \mp 1),\ \ n \in \mathbb{Z}\}$$

elde edilir.

Soru 3. $coshz = -2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm. 1. Yol.

$$coshz = coshxcosy + isinhxsiny$$

olduğundan

$$coshz = coshxcosy + isinhxsiny = -2 + i0$$

ve buradan

1)$coshxcosy = -2$ ve 2) $sinhxsiny = 0$ sağlanmalıdır.

2) denklemi için: a) $sinhx = 0$ veya b) $siny = 0$ olmalıdır.

a) $sinhx = 0$ olsun. O halde $sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$ elde edilir.

Bulunan değer (1) denkleminde yerine yazılırsa $cosh(0)cosy = -2 \Rightarrow cosy = -2$ olup çözüm kümesi boştur.

b)$siny = 0$ olsun. Buradan $y = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ bulunur ve (1) denkleminde yerine yazılırsa $coshxcos(k\pi) = coshx(-1)^k = -2$ elde edilir. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$coshx \geq 1$ olduğundan k tek sayı olmalıdır. Buradan $y = (2n+1)\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$ bulunur. O halde $coshx = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 2$ olmak üzere $e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ve denklem çözülerek $e^x = 2 \mp \sqrt{3}$ bulunur. $e^x = 2+\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = ln(2+\sqrt{3})$ ve $e^x = 2-\sqrt{3} \Rightarrow x_2 = ln(2-\sqrt{3})$ elde edilir. Sonuç olarak

$$z_1 = ln(2+\sqrt{3}) + i(2n+1)\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

ve

$$z_2 = ln(2-\sqrt{3}) + i(2n+1)\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. $ln(2-\sqrt{3}) = -ln(2+\sqrt{3})$ olduğundan

$$z = \mp ln(2+\sqrt{3}) + i(2n+1)\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

şeklinde de yazılabilir.

2. Yol. $coshz = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = -2 \Rightarrow e^z + e^{-z} = -4 \Rightarrow e^{2z} + 4e^z + 1 = 0$ elde edilir. Son denklem çözülerek

$$e^{z_1} = -2+\sqrt{3} \Rightarrow z_1 = log(-2+\sqrt{3})$$

ve

$$e^{z_2} = -2-\sqrt{3} \Rightarrow z_2 = log(-2-\sqrt{3})$$

bulunur. $arg(-2+\sqrt{3}) = Arg(-2+\sqrt{3})+2n\pi = \pi+2n\pi = (2n+1)\pi,\ \ n \in \mathbb{Z}$ dir. Buradan

$$z_1 = log(-2+\sqrt{3}) = ln(2-\sqrt{3}) + (2n+1)\pi i,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

ve

$$z_2 = log(-2-\sqrt{3}) = ln(2+\sqrt{3}) + (2n+1)\pi i,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

elde edilir.

Soru 4. $arctan(2i)$ nin tüm değerlerini bulunuz.

Çözüm. $z = arctan(2i)$ diyelim. Bu durumda $tanz = \frac{sinz}{cosz} = 2i$ olur ve buradan

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}} = 2i$$

elde edilir.

Buradan
$$\frac{e^{2iz-1}}{e^{2iz+1}} = -2 \Rightarrow e^{2iz} = -\frac{1}{3}$$
bulunur, böylece

$$\begin{aligned} 2iz &= log\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= ln\frac{1}{3} + i\left(\pi + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

olur ve sonuç olarak

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2i} ln\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}(1+2k) \\ &= -\frac{i}{2} ln3 + \frac{\pi}{2}(1+2k), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

elde edilir.

Soru 5. $arcsin(i)$ nin tüm değerlerini bulunuz.

Çözüm. $arcsinz = -ilog[iz + (1-z^2)^{1/2}]$ olduğundan

$$\begin{aligned} arcsinz &= -ilog[i^2 + (1-i^2)^{1/2}] \\ &= -ilog[-1 + (1+1)^{1/2}] \\ &= -ilog(-1 + 2^{1/2}) \end{aligned}$$

$2^{1/2}$ nin köklerini bulalım:

$$z_k = 2^{1/2} e^{i\frac{(0+2k\pi)}{2}} = \sqrt{2} e^{k\pi i}, \quad k = 0, 1$$

elde edilir ve

$$z_k = \mp\sqrt{2}$$

bulunur. Buradan

$$arcsin(i) = -ilog(-1 \mp \sqrt{2})$$

olur ve

1)

$$\begin{aligned} log(-1-\sqrt{2}) &= ln|-1-\sqrt{2}| + iarg(-1-\sqrt{2}) \\ &= ln(1+\sqrt{2}) + (2n+1)\pi i, \ \ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} log(-1+\sqrt{2}) &= ln|-1+\sqrt{2}| + iarg(-1+\sqrt{2}) \\ &= ln(-1+\sqrt{2}) + 2n\pi i, \ \ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$z_1 = -i\left[ln(1+\sqrt{2}) + (2n+1)\pi i\right], \ \ n \in \mathbb{Z}$$

$$z_2 = -i\left[ln(-1+\sqrt{2}) + 2n\pi i\right], \ \ n \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Ayrıca
$-ln(\sqrt{2}-1) = ln(-1-\sqrt{2}) = -ln(1+\sqrt{2})$ olduğundan tüm değerler

$$\begin{aligned} & -i\left[(-1)^{n+1}ln(1+\sqrt{2}) + n\pi i\right] \\ & = (-1)^n iln(1+\sqrt{2}) + n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Soru 6. $arctanh(1+2i)$ nin tüm değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$$arctanhz = \frac{1}{2}log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

şeklindedir. Buradan

$$
\begin{aligned}
arctanh(1+2i) &= \frac{1}{2}log\left(\frac{1+1+2i}{1-1-2i}\right) = \frac{1}{2}log\left(\frac{2+2i}{-2i}\right) \\
&= \frac{1}{2}log\left(\frac{1+1}{-i}\right) = \frac{1}{2}log(i-1)
\end{aligned}
$$

ve $log(i-1) = ln|i-1| + iarg(i-1)$, $arg(i-1) = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi$ dir. Buradan

$$log(i-1) = ln\sqrt{2} + i(\frac{3}{4}\pi + 2n\pi), \ \ n \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$arctanh(1+2i) = \frac{1}{4}ln2 + i(\frac{3}{8}\pi + n\pi), \ \ n \in \mathbb{Z}$$

bulunur.

Alıştırmalar

1) Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

$$\textbf{a)} cosz = \frac{3}{4} + i\frac{1}{4} \qquad \textbf{b)} cosz = sinz$$

2) Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$\textbf{a)} sin(z_1 - z_2) = sinz_1cosz_2 - cosz_1sinz_2$$

$$\textbf{b)} cos(z_1 - z_2) = cosz_1cosz_2 + sinz_1sinz_2$$

3) Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$\textbf{a)} 1 - tanh^2 z = sech^2 z$$

$$\textbf{b)} coth^2 z - 1 = csch^2 z$$