4. İNTEGRALLER

4.1. Kompleks İntegrasyon

Tanım 1. $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $f(t) = u(t) + iv(t)$ biçiminde olsun. Eğer u ve v, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilirse,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2. A, $\mathbb{C}$ de açık bir küme $f : A \to \mathbb{C}$ sürekli ve $C : [a,b] \to \mathbb{C}$, $C([a,b]) \subset A$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. f nin C boyunca integrali

$$\int_C f = \int_C f(z)dz$$

simgesi ile gösterilir ve

$$\int_C f = \int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt$$

olarak tanımlanır.

Önerme 1. C eğrisinin uzunluğu L ve $|f(z)|$ nin C üzerindeki maksimum değeri M ise

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|dz \leq ML$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Soru 1. C uç noktaları α ve β olan diferensiyellenebilir bir eğri ve k bir kompleks sayı olmak üzere,

a) $\int_C kdz = k(\beta - \alpha)$

b) $\int_C zdz = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$

c) $\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}),\ \ n \neq -1$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. a) $\int_C kdz = k\int_C dz$ dir. $f(z) = 1$ ve belirli bir integralde sabit ihmal edilebileceğinden, $F(z) = z$ nin türevi $f(z)$ dir. O halde

$\int_C kdz = k\int_C dz = kz|_\alpha^\beta = k(\beta - \alpha)$,

b) $\int_C zdz = \int_C d(\frac{1}{2}z^2) = \frac{1}{2}z^2|_\alpha^\beta = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$,

c) $\int_C z^n dz = \int_C d(\frac{z^{n+1}}{n+1}) = \frac{1}{n+1}z^{n+1}|_\alpha^\beta = \frac{1}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$, $n \neq -1$ elde edilir.

Soru 2.$\int_0^\pi e^{it}dt$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. 1. Yol.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{it}dt &= \int_0^\pi (cost + isint)dt \\
&= \int_0^\pi costdt + i\int_0^\pi sintdt \\
&= sint|_0^\pi - icost|_0^\pi \\
&= (sin\pi - sin0) - i\,(cos\pi - cos0) \\
&= 0 - i(-1-1) \\
&= 2i
\end{aligned}$$

bulunur.

2. Yol. Eğer $U(t) + iV(t) = F(f)$ denilirse F, f nin antitürevi olur ve $\int_a^b f(t)dt = F(t)|_a^b = F(b) - F(a)$ dır.
Böylece

$$\int_0^\pi e^{it}dt = \frac{1}{i}e^{it}|_0^\pi = -i\left(e^\pi - e^{i0}\right) = -i(-1-1) = 2i$$

bulunur.

Soru 3. C eğrisi $|z| = 1$ çemberi olmak üzere $\int_C |z|^2 dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. C eğrisi $|z| = 1$ çemberi olduğundan $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ biçiminde yazılabilir. Buradan $dz = ie^{i\theta}d\theta$ olur ve

$$\begin{aligned}
\int_C |z|^2 dz &= \int_0^{2\pi} |e^{i\theta}|^2 ie^{i\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} ie^{i\theta} d\theta \\
&= e^{i\theta}|_0^{2\pi} \\
&= e^{2\pi i} - e^{i.0} \\
&= 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Soru 4. C eğrisi uç noktaları $-i, i$ olan düzgün eğri olmak üzere

$$\int_C (5z^3 - 2z^2 + iz + 8i)dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\int_C (5z^3 - 2z^2 + iz + 8i)dz &= \int_{-i}^{i} 5z^3 dz - \int_{-i}^{i} 2z^2 dz + \int_{-i}^{i} izdz + \int_{-i}^{i} 8idz \\
&= \frac{5}{4}z^4|_{-i}^{i} - \frac{2}{3}z^3|_{-i}^{i} + \frac{1}{2}iz^2|_{-i}^{i} + 8iz|_{-i}^{i} \\
&= 0 - \frac{2}{3}(-i - i) + \frac{1}{2}(-1 + 1) + 8i(i + i) = \frac{4}{3}(i - 16)
\end{aligned}$$

bulunur.

Soru 5: $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy$ integralini,

a) $x = 2t$, $y = t^2 + 3$ eşitlikleri ile verilen yol boyunca,

b) (0,3) den (2,3) noktasına giden ve sonra (2,3) noktasından (2,4) noktasına giden doğru parçalarının oluşturduğu yol boyunca hesaplayınız.

Çözüm: a)(0,3) ve (2,4) noktaları parabol üzerinde $t = 0$ ve $t = 1$ noktalarına karşılık gelmektedir. Böylece

$$\begin{aligned}\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy &= \int_0^1 [2(t^2 + 3) + (2t)^2]2dt + \int_0^1 [6t - (t^2 + 3)]2tdt \\ &= \int_0^1 [24t^2 + 12 - 2t^3 - 6t]dt = \frac{33}{2}\end{aligned}$$

bulunur.

b) (0,3) den (2,3) noktasına giden doğru denklemi $y = 3$ olduğundan, $dy = 0$ olur. O halde bu doğru boyunca integral

$$\int_{x=0}^{2} (6 + x^2)dx + (3x - 3).0 = \int_0^2 (6 + x^2)dx = \frac{44}{3}$$

bulunur.

(2,3) den (3,4) noktasına giden doğru denklemi $x = 2$ olduğundan $dx = 0$ olur. O halde bu doğru boyunca integral

$$\int_{y=3}^{4} (2y + 4).0 + (6 - y)dy = \int_3^4 (6 - y)dy = \frac{5}{2}$$

bulunur.

Böylece aranan integral

$$\frac{44}{3} + \frac{5}{2} = \frac{103}{6}$$

olarak elde edilir.

4.2. Çevre İntegralleri

Soru 1. C eğrisi $|z - a| = R$, $(R > 0)$ çemberi olmak üzere $\int_C \frac{dz}{z-a}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

Buna göre
$|z-a| = R \Rightarrow z-a = Re^{i\theta} \Rightarrow z = a + Re^{i\theta},\ \ dz = iRe^{i\theta}d\theta,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi$
olur.
Böylece

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}} d\theta = i\theta|_0^{2\pi} = i(2\pi - 0) = 2\pi i$$

elde edilir.

Soru 2. C eğrisi $y = x^2$ parabolünün $(0,0)$ ve $(3,9)$ noktaları arasındaki parçası olmak üzere $\int_C \overline{z}dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_C \overline{z}dz &= \int_C (x-iy)(dx+idy),\ \ y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx \\
&= \int_{(0,0)}^{(3,9)} (x-x^2)(dx+i2xdx) \\
&= \int_0^3 xdx + i2x^2dx - ix^2dx + 2x^3dx \\
&= \int_0^3 (2x^3+x)dx + ix^2dx \\
&= \left(\frac{2}{4}x^4 + \frac{x^2}{2} + i\frac{x^3}{3}\right)|_0^3 \\
&= \frac{81}{2} + \frac{9}{2} + i\frac{27}{3} \\
&= 45 + 9i
\end{aligned}$$

bulunur.

Soru 3. C eğrisi $z_1 = 0$ noktasını $z_2 = 2+4i$ noktasına birleştiren doğru parçası olmak üzere $\int_C |z|^2 dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. 1. Yol.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

eşitliğinden $\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-0}{2-0}$ olup $y = 2x$ doğrusu bulunur. $y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$ ve

$$\begin{aligned}
\int_C |z|^2 dz &= \int_{(0,0)}^{(2,4)} (x^2 + y^2)(dx + idy) \\
&= \int_0^2 (x^2 + 4x^2)(dx + 2idx) \\
&= \int_0^2 5x^2(dx + 2idx) \\
&= \int_0^2 5x^2 dx + i \int_0^2 10x^2 dx \\
&= \frac{5}{3}x^3|_0^2 + i\frac{10}{3}x^3|_0^2 \\
&= \frac{40}{3} + \frac{80}{3}i
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. Yol. z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçasının parametrik denklemi

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \le t \le 1$$

şeklindedir. Buna göre $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + 4i$ olmak üzere

$$z(t) = 0 + t(2 + 4i - 0) = (2 + 4i)t, \quad 0 \le t \le 1$$

ve $dz = (2 + 4i)dt$ bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
\int_C |z|^2 dz &= \int_0^{2+4i} |z|^2 dz \\
&= \int_0^1 |(2+4i)t|^2 (2+4i)dt \\
&= \int_0^1 (4t^2+16t^2)(2+4i)dt \\
&= \int_0^1 20t^2(2+4i)dt \\
&= \int_0^1 (40t^2+80t^2 i)dt \\
&= \frac{40}{3}+\frac{80}{3}i
\end{aligned}$$

elde edilir.

Soru 4. $\int_C \overline{z}dz$ integralini, $z=0$ dan $z=4+2i$ noktasına giden $z=z(t)=t^2+it$ yolu boyunca hesaplayınız.

Çözüm. C üzerindeki $z=0$ ve $z=4+2i$ noktaları sırası ile $t=0$, $t=2$ değerlerine karşılık gelir. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_C \overline{z}dz &= \int_0^2 \overline{(t^2+it)}d(t^2+it) = \int_0^2 (t^2-it)(2t+i)dt \\
&= \int_0^2 (2t^3-it^2+t)dt = 10-\frac{8}{3}i
\end{aligned}$$

bulunur.

Soru 5. C eğrisi $|z|=3$ çemberinin üst yarısı olmak üzere $\left|\int_C \frac{dz}{2z^2+1}\right|$ için bir üst sınır bulunuz.

Çözüm.

Buna göre $|f(z)| = \frac{1}{|2z^2+1|}$ olmak üzere $C:|z|=3$ üzerinde

$$|f(z)| = \frac{1}{|2z^2+1|} \leq \frac{1}{|2|z|^2-1|} = \frac{1}{|2.3^2-1|} = \frac{1}{17} = M$$

ve C eğrisinin uzunluğu $L = \frac{2.3\pi}{2} = 3\pi$ br dir.

Sonuç olarak

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML = \frac{3}{17}\pi$$

elde edilir.

Soru 6. C eğrisi $|z| = 1$ çemberi olmak üzere $\left|\int_C (z+2)dz\right|$ için bir üst sınır bulunuz.

Çözüm. $|f(z)| = |z+2|$ olmak üzere $C : |z| = 1$ üzerinde

$$|f(z)| = |z+2| \leq |z| + 2 = 3 = M$$

ve C eğrisinin uzunluğu $L = 2\pi.1 = 2\pi$ br dir.

Sonuç olarak

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML = 3.2\pi = 6\pi$$

olarak bulunur.

Soru 7. $C : z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\left|\int_C \frac{e^z}{z}dz\right| \leq \pi\frac{e}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$L = \int_0^{\pi/2} |C'(t)|dt = \int_0^{\pi/2} |ie^{it}|dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

ve $C(t) = e^{it} = cost + isint$ üzerinde,

$$\left|\frac{e^z}{z}\right| = \frac{e^{cost}}{1} \leq e$$

olur.

O halde $M = e$ alınırsa,

$$\left|\int_C \frac{e^z}{z}dz\right| \leq ML = \pi\frac{e}{2}$$

bulunur.

Alıştırmalar

1) $\int_{(0,3)}^{(2,4)}(2y - x^2)dx - (3x - y)dy$ integralini, aşağıdaki yollar boyunca hesaplayınız.

a) $x = 2t$, $y = t^2 + 3$ parabolü,

b) (0,3) den (2,3) noktasına sonra da (2,4) noktasına giden kırık çizgi.

2) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\textbf{a)} \int sin2zcos2zdz \qquad \textbf{b)} \int z^2 sin4zdz$$

3) C, $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ eğrisi üzerindeki (1,1) den (2,3) noktasına giden yayı gösterdiğine göre,

$$\int_C (12z^2 - 4iz)dz$$

integralini hesaplayınız.