4.3. Cauchy-Goursat Teoremi

Teorem 1 (Cauchy-Goursat). Eğer $f(z)$ basit kapalı bir C çevresinin üzerinde ve içinde analitik ise, bu durumda $\int_C f(z)dz = 0$ dır.

Soru 1. $\int_{|z|=1} cos z dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $cos z$ fonksiyonu tüm kompleks düzlemde analitiktir. $C : |z| = 1$ birim çemberi basit kapalı bir eğri olduğundan Cauchy-Goursat Teoremi gereğince verilen integral 0 dır.

Soru 2. $\int_{|z-z_0|=R} e^z dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. e^z, $|z-z_0| = R$ basit kapalı çevresinin içinde ve üzerinde analitik olduğundan Cauchy-Goursat Teoremi gereğince verilen integral 0 dır.

Soru 3. $C : |z| = 2$ olmak üzere

$$\int_C \frac{dz}{z^2+16}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm. $f(z) = \frac{1}{z^2+16}$ fonksiyonu $z = \mp 4i$ noktaları dışında tüm kompleks düzlemde analitiktir.

$z = \mp 4i$ noktaları $|z| = 2$ çemberinin içinde veya üzerinde olmadığından verilen integralin değeri Cauchy-Goursat Teoremi'nden 0 dır.

Soru 4. C eğrisi $y = x^3$ eğrisinin $-1-i$ den $1+i$ ye kadar olan parçası olmak üzere $\int_C 3z^2 dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $f(z) = 3z^2$ fonksiyonu C yi kapsayan bir basit bağlantılı bölge üzerinde analitiktir. O halde $f(z)$ nin $-1-i$ den $1+i$ ye kadar olan parça boyunca integrali çevreden bağımsızdır. Böylece

$$\int_C 3z^2 dz = \int_{-1-i}^{1+i} 3z^2 dz = z^3\Big|_{-1-i}^{1+i} = (1+i)^3 - (-1-i)^3$$

bulunur.

Soru 5. $\int_0^{\pi+2i} cos\frac{z}{2}dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $f(z) = cos\frac{z}{2}$ fonksiyonu 0 dan $\pi + 2i$ ye kadar olan eğriyi kapsayan basiy kapalı bir bölge üzerinde analitiktir.

O halde $f(z)$ nin 0 den $\pi + 2i$ ye kadar olan parça boyunca integrali çevreden bağımsızdır. Böylece $F(z) = 2sin\frac{z}{2}$ için $F'(z) = f(z),\ \forall z \in \mathbb{C}$ olup integral değeri:

$$I = F(\pi + 2i) - F(0) = 2\left(sin\left(\frac{\pi + 2i}{2}\right) - sin0\right) = 2cosi = 2cosh1$$

bulunur.

Soru 6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_\gamma \frac{dz}{z^3}$, γ birim çember,

b) $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$, $\gamma : z(t) = 3 + e^{it},\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

Çözüm: a) $\gamma : z(t) = e^{it},\ \ dz = ie^{it}dt,\ \ 0 \le t \le 2\pi$ dir. Buradan

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^3} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{3it}}dt = i\int_0^{2\pi} e^{-2it}dt = -\frac{1}{2}e^{-2it}|_0^{2\pi} = 0$$

bulunur.

b) $f(z) = \frac{1}{z^2}$ fonksiyonu γ nın içinde ve üzerinde analitiktir. O halde Cauchy-Goursat Teoremi gereği

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0$$

olur.

Alıştırmalar

1) C çevresi köşeleri $0, 1, 1+i$ ve i olan birim kare ve $f(z) = cos\left(3 + \frac{1}{z-3}\right)$ olmak üzere

$$\int_C f(z)dz$$

integralini hesaplayınız.

2)

$$\textbf{a)} f(z) = \frac{z^2}{z-3} \qquad \textbf{b)} f(z) = Log(z+2)$$

$$\textbf{c)} f(z) = sechz \qquad \textbf{d)} f(z) = tanz$$

fonksiyonlarının analitik olduğu bölgeleri bulunuz. Basit kapalı C çevresinin $|z| = 1$ çemberi olması durumunda fonksiyonlara Cauchy-Goursat Teoremi'ni uygulayarak $\int_C f(z)dz = 0$ olduğunu gösteriniz.

3) Aşağıdaki integralleri yanlarında belirtilen yollar üzerinde hesaplayınız.

$$\textbf{a)} \int_C \frac{dz}{(z-1)^3}, C : |z| = \frac{1}{2} \qquad \textbf{b)} \int_C (z^5 + 3z^2 - 8i)dz, C : |z-i| = 1$$