2 Metrik Uzayda Açık, Kapalı Yuvar ve Komşuluk Kavramı

Tanım 2.1 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $x_0 \in X$ ve $r > 0$ alalım.
i) $B(x_o, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar,
ii) $B[x_o, r] := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar,
iii) $S(x_o, r) := \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ kümesine x_0 merkezli, r yarıçaplı küre adı verilir.

Tanım 2.2 X bir küme olmak üzere X üzerinde

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir metrik tanımlar. Bu metriğe diskre metrik ve (X, d) ikilisine diskre metrik uzay denir.

Soru 2.1 Bir metrik uzayda her açık yuvarın açık bir küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bir metrik uzayın herhangi bir alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart içerdiği her nokta için o noktayı merkez kabul eden bir açık yuvar içermesidir. (X, d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere $x \in B(a, r)$ alalım. $\rho = r - d(a, x) > 0$ için $B(x, \rho) \subset B(a, r)$ gerçeklenir. Bunu göstermek için $y \in B(x, \rho)$ alalım. O halde $d(y, x) < \rho = r - d(a, x)$ olup $d(y, x) + d(a, x) < r$ elde edilir. Üçgen eşitsiliğinden $d(y, a) \leq d(y, x) + d(a, x)$ olup bu ise $d(y, a) < r$ olmasını gerektirir. Bu durumda ise $y \in B(a, r)$ gerçeklenir. Bu ise istenilen içermeyi ispatlar. O halde $B(a, r)$ açık bir kümedir.

Soru 2.2 Bir metrik uzayda her kapalı yuvarın kapalı bir küme olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme: Keyfi bir kapalı yuvar alıp tümleyeninin açık olduğunu göstermek yeterlidir.

Soru 2.3 (X, d) diskre metrik uzay (aşikar metrik uzay) ve $x_0 \in X$ olmak üzere aşağıdaki kümeleri belirleyiniz:

a) $B(x_0, 1/2)$ **b)** $B[x_0, 1/2]$ **c)** $B[x_0, 1]$ **d)** $S(x_0, 1)$

Çözüm: a) Tanım gereği diskre metrik uzayda $d(x, x_0) < 1/2$ olması ancak $x = x_0$ durumunda gerçeklenebilir. O halde

$$\begin{aligned} B(x_0, 1/2) &= \{x \in X : d(x, x_0) < 1/2\} \\ &= \{x_0\} \end{aligned}$$

elde edilir.
b) a şıkkına benzer şekilde $B[x_0, 1/2] = \{x_0\}$ elde edilir.
c) Tanım gereği diskre metrik uzayda her $x \in X$ için $d(x, x_0) \leq 1$ olduğundan $B[x_0, 1] = X$ olur.
d) Tanım gereği diskre metrik uzayda her $x \neq x_0$ için $d(x, x_0) = 1$ olduğundan $S(x_0, 1) = X \setminus \{x_0\}$ elde edilir.

Soru 2.4 Diskre bir metrik uzayda her tek nokta kümesinin hem açık hem de kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: *Soru 2.3* (*a*) ve (*b*) şıklarında bir diskre metrik uzayda tek nokta kümelerinin hem açık hem de kapalı yuvarlarla karakterize edilebildiğini göstermiştik. Ayrıca *Soru 2.1 ve Soru 2.2*'de metrik uzaylarda her açık yuvarın açık bir küme ve her kapalı yuvarın da kapalı bir küme olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla diskre uzaylarda her tek nokta kümesi hem açık hem de kapalı kümedir.

Soru 2.5 Açık bir cümlenin sürekli bir dönüşüm altındaki görüntüsünün açık olmak zorunda bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm: 1. Yol: S^1 düzlemde birim çemberi göstermek üzere S^1 üzerine düzlemin alışılmış topolojiden indirgenen topolojiyi gözönüne alalım. Biliyoruz ki S^1'den x-eksenine tanımlanan $\pi : S^1 \to \mathbb{R}$ izdüşüm fonksiyonu süreklidir. Ancak birim çember indirgenmiş topolojide açık olduğu halde görüntüsü olan $[0, 1]$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalıdır. Dolayısıyla π fonksiyonu sürekli olduğu halde açık değildir.
2. Yol: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ sürekli fonksiyonunu ve $I = (-1, 1)$ açık kümesini alalım. $f(I) = [0, 1)$ olup I açık olduğu halde görüntüsü ne açık ne de kapalı bir kümedir.