3 Yakınsaklık, Cauchy Dizisi ve Tamlık Kavramları

Tanım 3.1 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere (x_k), X uzayında bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ mevcutsa (x_k) dizisi x noktasına yakınsaktır denir. Bu durumda x noktasına (x_k) dizisinin limiti denir ve

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x, \ \ \lim_k x_k = x$$

veya

$$x_k \to x$$

yazılır.

Tanım 3.2 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere (x_k), X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı mevcutsa (x_k) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.3 Bir metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise (yani X'de bulunan bir limit noktasına sahipse) uzaya tam uzay denir.

Soru 3.1 Bir metrik uzayda yakınsak bir alt diziye sahip olan bir Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde verilen bir $\varepsilon > 0$ için $n, m > N$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ olacak biçimde bir N sayısı mevcuttur. Diğer yandan (x_{n_k}) dizisi (x_n) dizisinin yakınsak alt dizisi olmak üzere $\lim_k x_{n_k} = x \in X$ olsun. O halde $n_k > M$ olduğunda $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$ olacak biçimde bir M sayısı mevcuttur. Şimdi $P = \text{maks}\{N, M\}$ olmak üzere her $n, n_k > M$ için

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

gerçeklenir. O halde (x_n) dizisi de $x \in X$ noktasına yakınsaktır.

Soru 3.2 Bir metrik uzayda Cauchy dizilerinin sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Özel olarak $\varepsilon = 1$ için $n, m > N$ olduğunda $d(x_n, x_m) < 1$ olacak biçimde bir N sayısı mevcuttur. O halde her $n > N$ için $d(x_n, x_{N+1}) < 1$ gerçeklenir. Diğer yandan $H = \text{maks}\{d(x_1, x_{N+1}), d(x_2, x_{N+1}), ..., d(x_N, x_{N+1})\}$ dersek her $n \leq N$ için $d(x_n, x_{N+1}) < H$ gerçeklenir. Eğer $M = \text{maks}\{1, N\}$ denirse her n için $d(x_{n,}x_{N+1}) < M$ olup her n, m için $d(x_n, x_m) < d(x_n, x_{N+1}) + d(x_m, x_{N+1}) < 2M$ gerçeklenir. Bu durumda (x_n) dizisi sınırlıdır.

Soru 3.3 d_1 ve d_2 aynı X kümesi üzerinde tanımlı iki metrik olsun. Her $x, y \in X$ için $ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y)$ olacak biçimde $a, b > 0$ sayıları mevcut ise (X, d_1) ile (X, d_2) uzaylarında Cauchy dizilerinin çakışık olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (x_n) dizisi (X, d_1) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ için $n, m > N$ olduğunda $d_1(x_n, x_m) < \varepsilon/b$ olacak biçimde bir N sayısı mevcuttur. Diğer yandan $d_2(x_n, x_m) \leq bd_1(x_n, x_m) < \varepsilon$ olduğundan (x_n) dizisi (X, d_2) uzayında da bir Cauchy dizisidir. Benzer şekilde (X, d_2) uzayından bir Cauchy dizisi alınarak dizinin (X, d_2) uzayında bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir.