# 4 Tamlık İspatları

**Teorem 4.1** Tam bir metrik uzayın bir alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart alt uzayın kapalı olmasıdır.

**Teorem 4.2** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. Bu durumda
*i)* $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter şart $M$ kümesinde $x_n \to x$ olacak biçimde bir $(x_n)$ dizisinin olmasıdır.
*ii)* $M$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart terimleri $M$ kümesinin elemanı olan yakınsak her dizinin limitinin de $M$ kümesinde olmasıdır.

**Soru 4.1** $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin alışılmış metriğe göre (mutlak değer metriği) tam olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** $(x_n)$ $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisi olsun. O halde bu dizi sınırlı olup Bolzano-Weierstrass Teoreminden yakınsak bir alt diziye sahiptir (alışılmış metriğe göre). $(x_n)$ yakınsak alt diziye sahip bir Cauchy dizisi olduğundan yakınsaktır. Bu da $\mathbb{R}$'nin tamlığını gösterir.

**Soru 4.2** $\mathbb{R}^n$ uzayının $d(x, y) = \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}$ ile tanımlı metriğe göre tam olduğunu gösteriniz. Burada $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ şeklindedir.

**Çözüm:** $(x_m)$ dizisi $\mathbb{R}^n$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Dikkat edilirse her $m \in \mathbb{N}$ için $x_m \in \mathbb{R}^n$ olup

$$x_m = \left( x_1^{(m)}, ..., x_n^{(m)} \right)$$

şeklinde gösterime sahiptir. $(x_m)$ Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $m, r > n_0$ olduğunda

$$\left( \sum_{j=1}^{n} \left| x_j^{(m)} - x_j^{(r)} \right|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0$ mevcuttur. O halde her $j = 1, ..., n$ için $\left| x_j^{(m)} - x_j^{(r)} \right| < \varepsilon$ gerçeklenir. Bu durumda her $j = 1, ..., n$ için $\left( x_j^{(m)} \right)$ dizisi $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $\left( x_j^{(m)} \right) \to \alpha_j$ olacak şekilde bir $\alpha_j \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Şimdi $x^{(m)} \to (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ olduğunu gösterelim. Her $j = 1, ..., n$ için

$\left(x_j^{(m)}\right) \to \alpha_j$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $m > n_j$ olduğunda $\left|x_j^{(m)} - \alpha_j\right| < \varepsilon/\sqrt{n}$ olacak şekilde bir $n_j$ sayısı mevcuttur. Şimdi $n_1 = \underset{j}{\text{maks}}\, \alpha_j$ dersek her $m > n_1$ için $\left(\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^{(m)} - \alpha_j\right|^2\right)^{1/2} < \varepsilon$ gerçeklenir. Bu durumda aldığımız keyfi Cauchy dizisi $\mathbb{R}^n$'de bir limite sahip olduğundan uzay tamdır.

**Soru 4.3** $\mathbb{R}$'nin $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ ile tanımlı metrik ile tam olmadığını gösteriniz.

**Çözüm:** $\mathbb{R}$'de $x_n = n$ ile tanımlı diziyi göz önüne alalım. Tanjant fonksiyonu artan olduğundan her $n > m$ için

$$\begin{aligned}
0 &\leq d(x_n, x_m) \\
&= |\arctan x_n - \arctan x_m| \\
&= |\arctan n - \arctan m| \\
&= \arctan n - \arctan m \\
&= \arctan \frac{n-m}{1+nm} \\
&\leq \arctan \frac{n}{1+nm} \\
&\leq \arctan \frac{n}{nm} \\
&\leq \arctan \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $n, m \to \infty$ için limit alınırsa $d(x_n, x_m) \to 0$ bulunur. Bu ise $(x_n)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Kabul edelim ki $(x_n) \to L \in \mathbb{R}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, L) \\
&= \lim_{n\to\infty} |\arctan n - \arctan L| \\
&= \left|\frac{\pi}{2} - \arctan L\right|
\end{aligned}$$

olur. O halde $\arctan L = \pi/2$ elde edilir ki bu ise böyle bir $L$ sayısı mevcut olamayacağından çelişkidir. Yani $(x_n)$ dizisinin yakınsak değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, d)$ tam değildir.

**Soru 4.4** $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin $d(n,m) = |n - m|$ ile tanımlanan metrik ile tam olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** $(x_k)$ dizisi $\mathbb{Z}$'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $(x_k)$ dizisi sonlu terim hariç sabit bir dizidir. Dolayısıyla yakınsaktır.

**Soru 4.5** $C[a,b]$ uzayının $Y = \{x \in C[a,b] : x(a) = x(b)\}$ alt uzayının $d(x,y) = \underset{t\in[a,b]}{\text{maks}} |x(t) - y(t)|$ ile tanımlı $d$ metriğine göre tam olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** $C[a,b]$ uzayının $d$ metriğine göre tamlığını biliyoruz. O halde *Teorem 4.1* gereğince $Y$ alt uzayının tam olduğunu göstermek için kapalılığını göstermek yeterlidir. Bunun için $x \in \overline{Y}$ alalım. *Teorem 4.2 i* şıkkından $Y$ kümesinde $y_n \to x$ olacak biçimde bir $(y_n)$ dizisi vardır. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $\underset{t\in[a,b]}{\text{maks}} |y_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0$ sayısı mevcuttur. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her $n > n_0$ için $|y_n(a) - x(a)| < \varepsilon$ ve $|y_n(b) - x(b)| < \varepsilon$ gerçeklenir. Bu ise $\mathbb{R}$'de $y_n(a) \to x(a)$ ve $y_n(b) \to x(b)$ olmasıdır. Diğer yandan her $n$ için $y_n \in Y$ olduğundan $y_n(a) = y_n(b)$ olup $0 = \lim\limits_{n\to\infty} (y_n(a) - y_n(b)) = x(a) - x(b)$ gerçeklenir. Bu ise $x \in Y$ demektir. Yani $\overline{Y} \subset Y$ elde edilir ki bu da $Y$ kümesinin kapalı olması demektir.