5 Metrik Uzayların Tamlaştırılması

Soru 5.1 (X_1, d_1) ile (X_2, d_2) izometrik iki metrik uzay olsun. Bu durumda (X_1, d_1) uzayı tam ise (X_2, d_2) uzayının da tam olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (X_1, d_1) ile (X_2, d_2) izometrik ise her $x, y \in X_1$ için $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ olacak biçimde birebir ve örten bir $f : X_1 \to X_2$ dönüşümü mevcuttur. Kabul edelim ki (X_1, d_1) tam ve (y_n) dizisi (X_2, d_2) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için $n, m > N$ olduğunda $d_2(y_n, y_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir N sayısı mevcuttur. f örten olduğundan her n için $f(x_n) = y_n$ olacak biçimde bir $x_n \in X_1$ mevcuttur. Diğer yandan f bir izometri olduğundan $d_1(x_n, x_m) = d_2(f(x_n), f(x_m)) = d_2(y_n, y_m)$ olup $n, m > N$ için $d_1(x_n, x_m) < \varepsilon$ gerçeklenir. O halde (x_n) dizisi (X_1, d_1) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X_1, d_1) tam olduğundan $\lim\limits_n d_1(x_n, x) = 0$ olacak biçimde $x \in X_1$ mevcuttur. Şimdi $f(x) = y \in Y$ dersek yine f izometri olduğundan her n için $d_2(y_n, y) = d_1(x_n, x)$ gerçeklenir. Böylece $\lim\limits_n d_2(y_2, y) = \lim\limits_n d_1(x_n, x) = 0$ olur ki bu da (y_n) dizisinin (X_2, d_2) uzayında yakınsak olması demektir. Bu ise (X_2, d_2) uzayının tamlığını ispatlar.

Soru 5.2 İki izometrik uzayın aynı zamanda homeomorfik olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (X_1, d_1) ile (X_2, d_2) izometrik uzaylar olsun. O halde her $x, y \in X_1$ için $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ olacak biçimde birebir ve örten bir $f : X_1 \to X_2$ dönüşümü mevcuttur. Öncelikle f'nin sürekli olduğunu gösterelim. $x_o \in X_1$ keyfi olmak üzere $\lim\limits_n x_n = x_0$ olsun. O halde $\lim\limits_n d_1(x_n, x_0) = 0$ olup f izometri olduğundan $\lim\limits_n d_2(f(x_n), f(x_0)) = 0$ gerçeklenir. Yani f süreklidir. f birebir ve örten olduğundan f^{-1} mevcuttur. $y_0 \in X_2$ keyfi olmak üzere $\lim\limits_n y_n = y$ olsun. f örten olduğundan $f(x) = y$ ve her n için $f(x_n) = y_n$ olacak şekilde $x, x_n \in X_1$ mevcuttur. Diğer yandan $d_2(y_n, y) = d_1(x_n, x)$ olduğundan $\lim d_1(x_n, x) = 0$ gerçeklenir. Dolayısıyla f^{-1} sürekli olup f bir homeomorfizmdir. Yani iki uzay homeomorfiktir.

Soru 5.3 Bir tam bir de tam olmayan metrik uzayın homeomorf olabileceğini bir örnekle açıklayınız.

Çözüm: $(\mathbb{R}, |.|)$ tam bir metrik uzay olduğunu biliyoruz. Diğer yandan $(-1, 1)$ açık olduğundan $((-1, 1), |.|)$ alt uzayı tam değildir. Ancak $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ ile tanımlı $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir. (f'nin bir homeomorfizm olduğunu gösteriniz.)

Soru 5.4 Bir metrik uzayın bir Y altuzayı sonlu noktadan oluşuyorsa, Y'nin tam olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Y sonlu elemanlı ve (y_n) dizisi Y'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda (y_n) dizisi sonlu terim hariç sabit terimlidir. Dolayısıyla yakınsaktır.

Soru 5.5 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere X'deki tüm Cauchy dizileri kümesi üzerinde

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_n d(x_n, y_n) = 0$$

ile tanımlı $\sim$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: *i)* Keyfi (x_n) Cauchy dizisi ve her n için $d(x_n, x_n) = 0$ olduğundan $\lim_n d(x_n, x_n) = 0$ olup $(x_n) \sim (x_n)$ gerçeklenir.
ii) Keyfi (x_n) ve (y_n) Cauchy dizileri ve her n için $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$ olduğundan $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow (y_n) \sim (x_n)$ olur.
iii) $(x_n) \sim (y_n)$ ve $(y_n) \sim (z_n)$ olacak biçimde $(x_n), (y_n)$ ve (z_n) Cauchy dizilerini alalım. Her n için üçgen eşitsizliğinden $0 \leq d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$ yazılabilir. O halde $(x_n) \sim (y_n)$ ve $(y_n) \sim (z_n)$ olduğundan $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$ ve $\lim_n d(y_n, z_n) = 0$ olup $\lim_n d(x_n, z_n) = 0$ gerçeklenir. Yani $(x_n) \sim (z_n)$ olur.
Yansıma, simetri ve geçişme özellikleri sağlandığı için $\sim$ bağıntısı X üzerindeki tüm Cauchy dizilerinin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.