6 Vektör Uzay

Not: X bir vektör uzayı ve $M \subset X$ olsun. $\operatorname{boy} X$ ile X uzayının boyutunu, $s(M)$ ile M kümesinin kardinalitesini, $\operatorname{span} M$ ile M kümesinin gerdiği uzayı ve θ ile sıfır vektörünü göstereceğiz.

Soru 6.1 Alışılmış toplama ve çarpma işlemleri altında tüm reel sayıların oluşturduğu kümenin bir boyutlu bir reel vektör uzayı ve tüm kompleks sayıların oluşturduğu kümenin ise bir boyutlu bir kompleks vektör uzayı oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm: *i)* Alışılmış toplama ve çarpma işlemleri altında $\mathbb{R}$'nin bir reel vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Şimdi $\mathbb{R}$'nin boyutunu belirleyelim. Bunun için $x_0 \neq 0$ olacak şekilde $x_0 \in \mathbb{R}$ alalım. $M = \{x_0\}$ olmak üzere $\alpha x_0 = 0$ olduğundan $\alpha = 0$ olacağından M kümesi lineer bağımsız bir kümedir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x = \dfrac{x}{x_0} x_0$ yazılabildiğinden $\operatorname{span} M = R$ olur. O halde M kümesi $\mathbb{R}$ için bir baz olup $\operatorname{boy} \mathbb{R} = s(M) = 1$ elde edilir.
ii) Tüm kompleks sayıların oluşturduğu kümenin bir kompleks vektör uzayı olarak boyutu i şıkkına benzer şekilde 1 olarak belirlenir.

Soru 6.2 Alışılmış toplama ve çarpma işlemleri altında tüm kompleks sayıların oluşturduğu kümenin iki boyutlu reel vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Alışılmış toplama ve çarpma işlemleri altında $\mathbb{C}$'nin reel bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Şimdi $\mathbb{C}$'nin boyutunu belirleyelim. Bunun için $M = \{1, i\}$ kümesini göz önüne alalım. $\alpha 1 + \beta i = 0$ olduğunda $\alpha = \beta = 0$ olacağından M kümesi lineer bağımsızdır. Şimdi keyfi $z \in \mathbb{C}$ alalım. O halde $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = x + iy$ şeklinde ifade edilir. Bu ise $\operatorname{span} M = \mathbb{C}$ olduğunu gösterir. $s(M) = 2$ olduğunan $\operatorname{boy} \mathbb{C} = 2$ olur. Yani $\mathbb{C}$ uzayı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde iki boyutlu bir vektör uzayıdır.

Soru 6.3 n boyutlu bir vektör uzayında, herhengi bir elemanın $e_1, e_2, ..., e_n$ baz vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak tek türlü ifade edildiğini gösteriniz.

Çözüm: Kabul edelim ki bir x vektörü için $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ ve bazı j'ler için $\alpha_j \neq \beta_j$ olsun. O halde $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ olduğundan $\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) e_j = \theta$ elde edilir. Diğer yandan $e_1, e_2, ..., e_n$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan her j için $\alpha_j - \beta_j = 0$ olup $\alpha_j = \beta_j$ gerçeklenir. Bu ise çelişkidir.

Soru 6.4 Her $j = 1, 2, ..., n$ için $x_j(t) = t^j$ olmak üzere $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesinin $C[a, b]$ uzayında lineer bağımsız bir küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Kabul edelim ki $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \theta$ olsun. O halde her $t \in [a,b]$ için $\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right)(t) = 0$ olur yani $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j t^j = 0$ gerçeklenir. Buradan $\frac{d^n}{dt^n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j t^j = n!\alpha_n = 0$ elde edilir. Yani $\alpha_n = 0$ olur. Şimdi $\alpha_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j t^j = 0$ yazarsak $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j t^j = 0$ olur. Yine türev alınarak $\alpha_{n-1} = 0$ gerçeklenir. Bu şekilde devam edilerek $\alpha_n = \alpha_{n-1} = ... = \alpha_1 = 0$ bulunur ki bu da sistemin lineer bağımsız olduğunu gösterir.

Soru 6.5 Y bir X vektör uzayının bir alt uzayı olsun. Bir $x \in X$ elemanının Y'ye göre eş kümesi $x + Y$ ile gösterilir ve

$$x + Y := \{x + y : y \in Y\}$$

ile tanımlanır. Farklı eş kümeler X uzayının bir parçalanmasını oluşturur.

$$\begin{aligned} (w + Y) + (x + Y) &= (w + x) + Y \\ \alpha(x + Y) &= \alpha x + Y \end{aligned}$$

işlemleri altında bütün eş kümlerin sınıfı bir vektör uzay meydana getirir. Bu vektör uzayına X'in Y'ye göre bölüm uzayı adı verilir ve X/Y ile gösterilir. Buna göre $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \{(y, 0, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere X/Y bölüm uzayını bulunuz.

Çözüm: Tanımı gereği $\mathbb{R}^3/Y = \left\{x + Y : x \in \mathbb{R}^3\right\}$ olduğundan öncelikle $x \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $x + Y$ kümelerini belirleyelim. Her $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned} x + Y &= \{x + y : y \in Y\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) + (y, 0, 0) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1 + y, x_2, x_3) : y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\mathbb{R}^3/Y = \{\{(x_1 + y, x_2, x_3) : y \in \mathbb{R}\} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

sınıfı elde edilir.