7 Normlu Uzaylar ve Banach Uzayı

Tanım 7.1 X bir vektör uzayı, $x, y \in X$ keyfi vektörler ve α skaler olmak üzere
n1) $\|x\| \geq 0$
n2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
n3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
n4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ özellikleri gerçekleyen $\|.\|$ fonksiyonuna X uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir.

Not: $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $X \times X$ üzerinde $d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlı d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik adı verilir. Bu metrik ile tam olan bir normlu uzaya Banach uzayı denir.

Önerme 7.1 Normlu bir X uzayı üzerinde bir norm tarafından doğurulan bir d metriği, öteleme değişmezliği adı verilen aşağıdaki iki özelliği gerçekler: Her $x, y, z \in X$ ve her α skaleri için
i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$
ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x, y)$.

Uyarı: Bu önerme tek taraflıdır. Yani öteleme değişmezliğini gerçekleyen bir metrik normdan üretilmiştir denilemez. Bu önerme ile öteleme değişmezliği şartlarından en az birini gerçeklemeyen bir metriğin normdan elde edillmediği söylenebilir.

Soru 7.1 $X \neq \{\theta\}$ vektör uzayı üzerinde tanımlı diskre metriğin normdan üretilmediğini gösteriniz.

Çözüm: $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ ve. $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq 1$ olacak şekilde bir α skaleri alalım. $x \neq y$ olduğundan $\alpha x \neq \alpha y$ olup $d(\alpha x, \alpha y) = 1 \neq |\alpha| \, d(x, y) = |\alpha|$ gerçeklenir. O halde öteleme değişmezliği gerçeklenmediğinden d metriği normdan üretilmemiştir.

Soru 7.2 $C[0, 2\pi]$ uzayında $x(t) = \sin t$ ve $y(t) = \cos t$ ile tanımlı x, y fonksiyonlarını alalım. $y \in B[x, r]$ olacak şekilde en küçük r sayısını belirleyiniz.

Çözüm: Öncelikle $B[x, r] = \left\{ z = z(t) : \underset{0 \leq t \leq 2\pi}{\text{maks}} |\sin t - z(t)| \leq r \right\}$ olduğunu hatırlayalım. Bu durumda $y \in B[x, r]$ olacak şekilde en büyük r sayısı

$$r = \text{maks} \left\{ \underset{\substack{0 \leq t \leq \pi/4 \\ 5\pi/4 \leq t \leq 2\pi}}{\text{maks}} (\cos t - \sin t), \underset{\pi/4 \leq t \leq 5\pi/4}{\text{maks}} (\sin t - \cos t) \right\}$$

şeklindedir. O halde $r = \sqrt{2}$ olmalıdır.

Soru 7.3 $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x, y \in X$ için $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$ olup buradan $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$ gerçeklenir. Benzer şekilde $\|x\| - \|y\| \leq \|y - x\|$ de elde edilebilir. Bu iki eşitsizlikten ise $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|$ olduğu görülür.

Soru 7.4 $p > 1$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$ ile tanımlı $\|.\|$ fonksiyonunun bir norm olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

n1) Tanımdan $\|.\|_p$ fonksiyonunun negatif olmayan bir fonksiyon olduğu açıktır.

n2) $\|x\|_p = 0$ olsun. O halde $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = 0$ olup her $j = 1, 2, ..., n$ için $x_j = 0$ gerçeklenir. O halde $x = \theta$ olmalıdır. Yine $x = \theta$ ise $\|x\|_p = 0$ olacağı açıktır.

n3) $\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \|x\|$ gerçeklenir.

n4) Minkowski eşitsizliğinden $\|x + y\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p \right)^{1/p} = \|x\| + \|y\|$ elde edilir.

O halde $\|.\|$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir normdur.

Soru 7.5 Normlu bir $(X, \|.\|)$ uzayında $S(\theta, 1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ küresine birim küre adı verilir. $\mathbb{R}^2$'de $\|x\|_\infty = \text{maks}\{|x_1|, |x_2|\}$ ile tanımlı norm veriliyor. $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty\right)$ uzayında $S(\theta, 1)$ birim küresini belirleyiniz.

Çözüm: $\|x\|_\infty = 1$ olsun. O halde $\text{maks}\{|x_1|, |x_2|\} = 1$ olur. Bu durumda $S(\theta, 1)$ küresi $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \mp 1, -1 \leq x_2 \leq 1\right\}$ kümesi ile $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \mp 1, -1 \leq x_1 \leq 1\right\}$ kümelerinin birleşimidir. Bu ise merkezi orijinde bununan birim karenin kenarlarıdır.