9 Kompaktlık ve Sonlu Boyut

Tanım 9.1 X bir metrik uzay olsun. X uzayındaki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X uzayına kompakttır denir. $M \subset X$ olmak üzere M kümesindeki her dizi, limiti M kümesinde olacak şekilde yakınsak bir alt diziye sahipse M kompakt alt küme adını alır.

Teorem 9.1 Bir metrik uzayın kompakt kümleri kapalı ve sınırlıdır.

Uyarı 9.1 Teorem 9.1'in karşıtı her zaman doğru değildir. Ancak, sonlu boyutlu bir normlu uzayın bir M alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul M kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Soru 9.1 Sonsuz çoklukta noktadan oluşan bir diskre metrik uzayın kompakt olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: Diskre metrik uzaylarda tanım gereği yakınsak diziler sonlu terim hariç tüm terimleri çakışan diziler olacağından tüm terimleri birbirinden farklı bir dizi aldığımızda bu dizi yakınsak bir alt diziye sahip olamaz. Dolayısıyla sonuz çoklukta noktadan oluşan bir diskre metrik uzay kompakt olamaz.

Soru 9.2 X kompakt bir metrik uzay ve $M \subset X$ kapalı ise M'nin de kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (x_n) dizisi M kümesinde keyfi bir dizi olsun. Bu durumda $M \subset X$ ve X kompakt olduğundan (x_n) dizisi limiti X uzayında olacak biçimde yakınsak bir alt diziye sahiptir. Bu diziye (x_{n_k}) dersek $x_{n_k} \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcuttur. Her k için $x_{n_k} \in M$, $x_{n_k} \to x$ ve M kapalı olduğundan Teorem 4.2 *ii*'den $x \in M$ gerçeklenir. O halde M kompakttır.

Soru 9.3 $\mathbb{R}^2$ düzleminde kompakt ve kompakt olmayan eğrilere örnek veriniz.

Çözüm: *i)* $\mathbb{R}^2$'de $C_1 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$ kümesinin (birim çember) belirttiği eğriyi göz önüne alalım. C_1 kümesi tümleyeni açık olduğundan kapalıdır. Ayrıca her $r > 1$ için $C_1 \subset B[(0,0), r]$ olduğundan C_1 kümesi sınırlıdır. O halde $\mathbb{R}^2$ sonlu boyutlu olduğundan C_1 kümesi dolayısıyla belirttiği eğri kompakttır.
ii) $\mathbb{R}^2$'de $C_2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\right\}$ kümesinin belirttiği eğriyi göz önüne alalım. C_2 kümesi sınırsız ve $\mathbb{R}^2$ sonlu boyutlu olduğundan C_2 kompakt olamaz.

Soru 9.4 X ve Y iki metrik uzay ve $T : X \to Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda M kümesi X uzayında kompakt ise $T(M)$ kümesinin de Y uzayında kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm: M kompakt ve (y_n), $T(M)$ kümesinde bir dizi olsun. Her n için $y_n \in T(M)$ olduğundan $Tx_n = y_n$ olacak şekilde $x_n \in M$ mevcuttur. M kompakt olduğundan (x_n) dizisi $x_{n_k} \to x \in M$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisine sahiptir. T sürekli olduğundan $Tx_{n_k} \to Tx$ ve $x \in M$ olduğundan $Tx = y \in T(M)$ gerçeklenir. Ayrıca (x_{n_k}) dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisi olduğundan (Tx_{n_k}) dizisi de (y_n) dizisinin bir alt dizisi olup $T(M)$'de y noktasına yakınsak olduğundan $T(M)$ kümesi kompakttır.

Soru 9.5 X ve Y iki metrik uzay, X kompakt ve $T : X \to Y$ birebir, örten ve sürekli olsun. Bu durumda T'nin bir homeomorfizm olduğunu gösteriniz.

Çözüm: T^{-1} dönüşümünün sürekli olduğunu göstermeliyiz. V kümesi X'de kapalı bir küme olsun. X kompakt V kapalı olduğundan Soru 9.2'den V kümesi de kompakttır. O halde T sürekli olduğundan Soru 9.4'ten $T(V)$ kompakt olup kapalıdır. Bu ise T^{-1} dönüşümünün sürekli olduğunu gösterir.