10 Lineer Operatörler

Tanım 10.1 T, $D(T)$ tanım bölgesi ve $R(T)$ değer bölgesi **aynı cisim üzerinde** vektör uzayı olan bir operatör olsun. Her $x, y \in D(T)$ ve her α, β skaleri için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ oluyorsa T'ye lineer operatör denir.

Teorem 10.1 X ve Y aynı cisim üzerinde iki vektör uzayı, $D(T) \subset X$ ve $R(T) \subset Y$ olmak üzere $T : D(T) \to R(T)$ lineer bir operatör olsun. $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ ters operatörün mevcut olması için gerek ve yeter şart $N(T) = \{x \in D(T) : Tx = \theta_Y\}$ ile tanımlanan T'nin sıfır uzayı için $N(T) = \{\theta_X\}$ olmasıdır.

Soru 10.1 $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ ile tanımlanan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operatörünün lineer olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x, y \in \mathbb{R}^2$ ve her α, β skaleri için

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= T(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)) \\ &= T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= (\alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1) \\ &= \alpha(x_2, x_1) + \beta(y_2, y_1) \\ &= \alpha Tx + \beta Ty \end{aligned}$$

gerçeklendiğinden T lineerdir.

Soru 10.2 $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ ile tanımlanan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operatörünün sıfır uzayını belirleyiniz.

Çözüm: $\{x \in \mathbb{R}^2 : Tx = \theta\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1, 0) = (0, 0)\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ olduğundan $N(T) = \{0\} \times \mathbb{R}$ elde edilir.

Soru 10.3 $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. X'in bir alt uzayının görüntüsünün Y'nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $V \subset X$ bir alt vektör uzayı olsun. $y_1, y_2 \in T(V) = \{Tx : x \in X\}$ ve α, β skalerlerini alalım. O halde $y_1 = Tx_1$ ve $y_2 = Tx_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ mevcuttur. $\alpha y_1 + \beta y_1 = \alpha Tx_1 + \beta Ty_1$ olup T lineer olduğundan $\alpha y_1 + \beta y_1 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$ gerçeklenir. Diğer yandan V lineer uzay olduğundan $\alpha x_1 + \beta x_2 \in V$ gerçeklenir. O halde $\alpha y_1 + \beta y_1 \in T(V)$ olmalıdır.

Soru 10.4 İki lineer operatörün çarpımı (birleşimi) mevcutsa, bu çarpımın lineer olduğunu gösteriniz.

Çözüm: X, Y ve Z aynı cisim üzerinde üç vektör uzayı, $T : X \to Y$ ve $S : Y \to Z$ lineer operatörler olsun. O halde her $x_1, x_2 \in X$ ve α, β skalerleri için

$$\begin{aligned} ST(\alpha x_1 + \beta x_2) &= S(T(\alpha x_1 + \beta x_2)) \\ &= S(\alpha T x_1 + \beta T x_2) \\ &= \alpha\,(ST)\,x_1 + \beta(ST)x_2 \end{aligned}$$

gerçeklenir ki bu da çarpımın lineer olduğunu gösterir.

Soru 10.5 $T : D(T) \to Y$ tersi var olan lineer bir operatör olsun. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $D(T)$'de lineer bağımsız bir küme ise, $\{Tx_1, ..., Tx_n\}$ kümesinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ skalerleri için $\alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 + ... + \alpha_n T x_n = \theta_Y$ olsun. T lineer olduğundan $T\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) = \theta_Y$ gerçeklenir. T^{-1} mevcut olduğundan $N(T) = \{\theta_X\}$ olup bu durumda $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \theta_X$ gerçeklenir. Sistem lineer bağımsız olduğundan $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ olup bu da $\{Tx_1, ..., Tx_n\}$ kümesinin lineer bağımsızlığını ispatlar.

Soru 10.6 $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, her yerde her mertebeden türevi mevcut olan tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan X vektör uzayı veriliyor. $T : X \to X$ dönüşümü, $y(t) = Tx(t) = x'(t)$ ile tanımlanmak üzere T^{-1} operatörünün mevcut olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $N(T)$ sıfır uzayını belirleyelim. Bunun için $Tx = \theta$ olacak şekilde bir $x \in X$ alalım. O halde her $t \in R$ için $x'(t) = 0$ olup bu ise x fonksiyonunun herhangi bir sabit fonksiyon olmasını gerektirir. Yani $N(T) = \{x : x(t) = c, c \in \mathbb{R}\}$ gerçeklenir. O halde Teorem 10.1'den T^{-1} mevcut değildir.