11 Sınırlı ve Sürekli Lineer Operatörler

Tanım 11.1 $(X, \|.\|_1)$ ve $(Y, \|.\|_2)$ normlu uzaylar $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in D(T)$ için

$$\|Tx\|_2 \leq c \|x\|_1 \tag{11.1}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı mevcutsa T operatörüne sınırlı lineer operatör denir. Bu durumu bazen, uygunluk açısından, indislerdeki 1 ve 2 sayılarını yazmadan $\|Tx\| \leq c \|x\|$ şeklinde ifade edeceğiz.

Not: $(X, \|.\|_1)$ ve $(Y, \|.\|_2)$ normlu uzaylar olmak üzere X'den Y'nin içine olan operatörlerin uzayı $B(X, Y)$,

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_2 \,, \, T \in B(X, Y)$$

ile bir normlu uzaydır. Burda $\|T\|$ sayısına T operatörünün normu denir ve tanım gereğince 11.1 eşitsiliğini sağlayan her $c > 0$ sayısı için $\|T\| \leq c$ gerçeklenir.

Teorem 11. 2 X ve Y normlu uzaylar $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda T'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

Soru 11.1 X ve Y normlu uzaylar $T : X \to Y$ lineer operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart X uzayında sınırlı olan her M kümesi için $T(M)$ kümesinin de Y uzayında sınırlı olmasıdır. İspatlayınız.

Çözüm: T sınırlı bir operatör ve M kümesi X uzayında sınırlı bir alt küme olsun. T sınırlı olduğundan her $x \in X$ için $\|Tx\| \leq c \|x\|$ olacak şekilde bir $c > 0$ mevcuttur. Diğer yandan M sınırlı olduğundan her $x \in M$ için $\|x\| \leq H$ olacak biçimde bir $H > 0$ mevcut olacağından her $x \in M$ için $\|Tx\| \leq cH$ elde edilir ki bu ise $T(M)$ kümesinin sınırlılığını ispatlar.
Karşıt olarak X uzayındaki her M sınırlı kümesi için $T(M)$ sınırlı olsun. Şimdi X uzayında sınırlı $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ alt kümesini göz önüne alalım. $x \neq \theta$ olmak üzere $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ olduğundan $\frac{x}{\|x\|} \in M$ olmalıdır. $T(M)$ sınırlı olduğundan $\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq H$ olacak şekide $H > 0$ mevcuttur. Diğer yandan T lineer olduğundan $\|Tx\| \leq H \|x\|$ elde edilir. Eğer $x = \theta$ ise durum açıktır. O halde T operatörü sınırlıdır.

Soru 11.2 Her k için $y_k = \dfrac{x_k}{k}$ olmak üzere $Tx = y$ ile tanımlı $T : l_\infty \to l_2$ operatörü veriliyor. T operatörünün lineer ve sınırlı olduğunu gösterip $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ eşitliğinden yararlanarak normunu hesaplayınız.

Çözüm: T operatörünün lineerliği tanımdan açıktır. Keyfi $x \in l_\infty$ alalım. O halde $\|x\|_\infty = \sup\limits_k |x_k|$ olduğundan her k için $|x_k| \leq \|x\|_\infty$ gerçeklenir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|Tx\|_2 &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Tx)_k^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{k} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|x\|_\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \\ &= \|x\|_\infty \frac{\pi}{\sqrt{6}} \end{aligned} \tag{11.2}$$

olup T operatörü sınırlıdır. Şimdi $\|T\|$ sayısını hesaplayalım. Tanım gereği $\|T\| \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$ olduğu açıktır. Diğer yandan $z = (1, 1, 1, ...) \in l_\infty$ dizisi için $\|z\|_\infty = 1$ olup $\|Tz\|_2 \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|_2 = \|T\|$ gerçeklenir. Burada $\|Tz\| = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$ olduğundan $\dfrac{\pi}{\sqrt{6}} \leq \|T\|$ elde edilir. O halde buradan ve 11.2 eşitsizliğinden $\|T\| = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$ bulunur.

Soru 11.3 $p \geq 1$, $a = (a_k) \in l_p$ olsun. $x \in l_\infty$ için $f_a(x) = ax$ ile tanımlı $f_a : l_\infty \to l_p$ operatörünün lineer ve sınırlı olduğunu gösterip normunu hesaplayınız. Burada her k için $(ax)_k = a_k x_k$ ile verilmektedir.

Çözüm: $x, y \in l_\infty$ ve γ, β keyfi skalerler olmak üzere

$$\begin{aligned} f_a(\gamma x + \beta y) &= a(\gamma x + \beta y) \\ &= \gamma a_k x_k + \beta a_k y_k \\ &= \gamma f_a(x) + \beta f_a(y) \end{aligned}$$

olduğundan f_a lineerdir. Şimdi f_a operatörünün sınırlılığını gösterelim. Her

$x \in l_\infty$ için

$$\begin{aligned}
\|f_a(x)\|_p &= \|ax\|_p \\
&= \left(\sum_k |a_k x_k|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \|x\|_\infty \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p} \\
&= \|x\|_\infty \|a\|_p
\end{aligned}$$

olduğundan f_a sınırlıdır. Diğer yandan $z = (1, 1, 1, ...) \in l_\infty$ için $\|z\|_\infty = 1$ olup $\|Tz\|_p \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|_p = \|T\|$ gerçeklenir. Ayrıca $\|Tz\|_p = \|a\|_p$ olduğu açıktır. Bu durumda $\|f_a\| = \|a\|_p$ elde edilir.

Soru 11.4 T bir X normlu uzayından bir Y normlu uzayına sürekli bir lineer operatör olsun. Bu durumda (x_n) dizisi X uzayında bir Cauchy dizisi ise (Tx_n) de Y uzayında bir Cauchy dizisidir. Gösteriniz.

Çözüm: T operatörü sürekli lineer olduğundan Teorem 11.2'den sınırlıdır. (x_n) dizisi Cauchy olsun. Bu durumda $n, m \to \infty$ için $\|x_n - x_m\| \to \infty$ gerçeklenir. Diğer yandan T operatörü sınırlı ve lineer olduğundan

$$0 \leq \|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\| \to 0, \ n, m \to \infty$$

olup (Tx_n) bir Cauchy dizisidir.

Soru 11.5 $C[0,1]$ üzerinde , S ve T operatörlerini sırasıyla $y(s) = s\int\limits_0^1 x(t)dt$ ve $h(s) = sx(s)$ şeklinde tanımlayalım. S ile T yer değiştirebilir mi?

Çözüm: $x \in C[0,1]$ alalım. $((ST)x)(s) = S(Tx)(s) = s\int\limits_0^1 (Tx)(t)dt = s\int\limits_0^1 tx(t)dt$ ve $((TS)x)(s) = T(Sx)(s) = s\left(s\int\limits_0^1 x(t)dt\right)$ elde edilir. Şimdi $x(t) = t$ ile tanımlı $x \in C[0,1]$ fonksiyonunu alalım. $((ST)x)(s) = s\int\limits_0^1 t^2 dt = \dfrac{s}{3}$ ve $((TS)x)(s) = s\left(s\int\limits_0^1 tdt\right) = \dfrac{s^2}{2}$ olduğundan S ile T yer değiştiremez.