12 Lineer Fonksiyoneller

Tanım 12.1 Değer bölgesi $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ olan operatöre fonksiyonel denir.

Soru 12.1 $a \in l_2$ reel terimli dizisi veriliyor. $f : l_2 \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum\limits_k a_k x_k$ ile verilen fonksiyonelin lineer ve sınırlı olduğunu gösterip normunu hesaplayınız.

Çözüm: Keyfi $x, y \in l_2$ ve α, β skalerlerini alalım. $x, y, a \in l_2$ olduğundan Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $\sum\limits_k a_k x_k$ ve $\sum\limits_k a_k y_k$ serileri yakınsaktır. Buradan $f(\alpha x + \beta y) = \sum\limits_k (a_k x_k + a_k y_k) = \sum\limits_k a_k x_k + \sum\limits_k a_k y_k = \alpha f(x) + \beta f(y)$ elde edilir. O halde f lineerdir. Şimdi f'nin sınırlı olduğunu gösterelim. Her $x \in l_2$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sum_k |a_k| \, |x_k| \\ &\leq \left(\sum_k a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_k |x_k|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|a\|_2 \, \|x\|_2 \end{aligned}$$

elde edilir dolayısıyla f sınırlıdır. Tanım gereği $\|f\| \leq \|a\|_2$ elde edilir. Diğer yandan a reel olduğundan $|f(a)| = \|a\|_2^2$ olup

$$\|a\|_2 = \frac{|f(a)|}{\|a\|_2} \leq \sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|_2} = \|f\|$$

elde edilir. O halde $\|f\| = \|a\|_2$ olur.

Soru 12.2 $C[-2,1] \to \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f(x) = \int\limits_{-2}^{1} x(t)dt$ ile tanımlı f fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İntegral lineer olduğundan f'nin lineerliği açıktır. Her $x \in C[-2,1]$ için

$$|f(x)| = \left| \int_{-2}^{1} x(t)dt \right| \leq \|x\|_\infty \left| \int_{-2}^{1} dt \right| = 3 \, \|x\|$$

olup $\|f\| \leq 3$ gerçeklenir. Burada $\|x\|_\infty = \sup\limits_{-2 \leq t \leq 1} |x(t)|$ ile verilmektedir. O halde f lineer ve sınırlı olup süreklidir.

Soru 12.3 f kompleks bir X normlu uzay üzerinde lineer sınırlı bir fonksiyonel olmak üzere X üzerinde $g(x) = \overline{f(x)}$ ile tanımlı g fonksiyoneli lineer midir?

Çözüm: Keyfi $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alalım. $g(\alpha x + \beta y) = \overline{f(\alpha x + \beta y)} = \overline{\alpha f(x) + \beta f(y)} = \overline{\alpha} g(x) + \overline{\beta} g(y)$ olduğundan g lineer değildir.

Soru 12.4 Bir $M^* \subset X^*$ kümesinin $N(M^*)$ sıfır uzayı, her $f \in M^*$ için $f(x) = 0$ koşulunu sağlayan tüm $x \in X$ elemanlarından oluşan küme olarak tanımlanır. Bu uzayın bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $N(M^*)$ kümesinin X'in bir lineer alt uzayı olduğunu gösterelim. Keyfi $x, y \in N(M^*)$, keyfi α, β skalerler olsun. Her $f \in M^*$ için $f(x) = f(y) = 0$ olduğundan $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$ gerçeklenir. O halde $\alpha x + \beta y \in N(M^*)$ olur. Bu durumda $N(M^*)$ bir alt vektör uzaydır.