13 Sonlu Boyutlu Uzaylarda Lineer Operatörler ve Fonksiyoneller

Önerme 13.1 M, n-boyutlu bir X vektör uzayının bir gerçek alt uzayı ve f, M üzerinde lineer bir fonksiyonel olsun. X üzerinde $\widetilde{f}\mid_M = f$ olacak şekilde lineer bir $\widetilde{f}$ fonksiyoneli mevcuttur. (Bu fonksiyonele f'nin M'den X'e lineer genişlemesi denir.)

Soru 13.1 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelen T operatörünü elde ediniz. Bu operatör sınırlı mıdır?

Çözüm: Bu matris $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bir lineer dönüşüm tanımlar. Bu dönüşümü

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

matris çarpımı ile ifade edebiliriz. O halde T dönüşümü her $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ için $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 2x_3, -2x_1 + x_2)$ ile tanımlı dönüşümdür. $\mathbb{R}^3$ sonlu boyutlu olduğundan T lineer operatörü sınırlıdır.

Soru 13.2 $\mathbb{R}^3$ uzayında $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ bazının dual bazını bulunuz.

Çözüm: Dual baz tanımından $i, j = 1, 2, 3$ için $f_i(e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ olacak şekilde f_i fonksiyonellerini belirleyelim. O halde $f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$ tanımlarsak $\{f_i : i = 1, 2, 3\}$ kümesi aranılan dual bazdır.

Soru 13.3 $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\mathbb{R}^3$'ün $\{e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,-1), e_3 = (1,-1,-1)\}$ bazının dual bazı olsun. $x = (1,0,0)$ olmak üzere $f_1(x)$, $f_2(x)$ ve $f_3(x)$ değerlerini belirleyiniz.

Çözüm: $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\{(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,-1)\}$ bazının dual bazı olduğundan $f_i(e_j) = \delta_{ji}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi x vektörünü baz cinsinden ifade edelim. Bunun için $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = x$ olacak şekilde a_1, a_2, a_3 skalerlerini belirlemeliyiz. $a_1(1,1,1) + a_2(1,1,-1) + a_3(1,-1,-1) = (1,0,0)$ yazarsak buradan $a_1 = 1/2$, $a_2 = 0$ ve $a_3 = -1/2$ elde ederiz. Yani $x = \dfrac{e_1 + e_3}{2}$ şeklinde bir gösterime sahiptir. Şimdi f_1 fonksiyoneli lineer olduğundan

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1\left(\frac{e_1 + e_3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f_1(e_1) + f_1(e_3)\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 0) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $f_2(x) = 0$ ve $f_3(x) = 1/2$ bulunur.

Soru 13.4 $\mathbb{R}^3$'ün $Z = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\right\}$ alt uzayı üzerinde $f(x) = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_3)$ ile tanımlanan f fonksiyonelinin $\mathbb{R}^3$'e, $\widetilde{f}(1,1,1) = 3$ olacak şekilde lineer bir $\widetilde{f}$ genişlemesini bulunuz.

Çözüm: $\mathbb{R}^3$ üzerinde $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_3) + 3x_2$ ile tanımlı $\widetilde{f}$ fonksiyonelini alalım. Keyfi $x, y \in \mathbb{R}^3$ ve keyfi α, β skalerleri için

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(\alpha x + \beta y) &= \widetilde{f}(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_3 - \beta y_3) + 3(\alpha x_2 + \beta y_2) \\
&= \alpha\left(\frac{1}{2}(x_1 - x_3) + 3x_2\right) + \beta\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_3) + 3y_2\right) \\
&= \alpha\widetilde{f}(x) + \beta\widetilde{f}(y)
\end{aligned}
$$

olduğundan $\widetilde{f}$ lineerdir. Ayrıca $x_2 = 0$ olacak şekilde her $x \in \mathbb{R}^3$ için $\widetilde{f}(x) = f(x)$ ve $\widetilde{f}(1,1,1) = 3$ olduğundan $\widetilde{f}$ fonksiyoneli f'nin koşullara uyan bir genişlemesidir (Bu genişleme tek midir?).