14 Normlu Operatör Uzayları, Dual Uzay

Tanım 14.1 X ve Y aynı cisim üzerinde iki normlu uzay olsun. $B(X,Y)$ ile X'den Y'nin içine olan tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesini gösterelim. $B(X,Y)$,

$$(T_1+T_2)(x)=T_1x+T_2x$$

ve

$$(\alpha T)\,x=\alpha Tx$$

işlemleri ile bir vektör uzay olup daha önce tanımladığımız operatör normu tanımıyla bir normlu uzaydır. Hatta Y uzayının Banach olması durumunda $B(X,Y)$ uzayı da Banach uzayıdır. X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin (yani $Y=\mathbb{K}$) uzayına ise X'in dual uzayı (sürekli dual) denir ve X' ile gösterilir. Dikkat edilirse K tam olduğundan X'

$$\|f\|=\sup_{x\neq\theta}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Soru 14.1 $B(X,Y)$ uzayının sıfır elemanını belirleyip bir T operatörünün (vektör uzayı anlamında) tersini tanımlayınız.

Çözüm: Her $x\in X$ için $\phi x=\theta_Y$ ile tanımlı ϕ operatörünü göz önüne alalım. Keyfi $T\in B(X,Y)$ için $(T+\phi)x=Tx$ olacağından ϕ operatörü $B(X,Y)$ uzayının sıfırıdır. $T\in B(X,Y)$ olmak üzere her $x\in X$ için $(-T)x=-Tx$ ile tanımlı $-T$ operatörü de lineer ve sınırlıdır. Ayrıca $(T+(-T))\,x=Tx+(-T)x=Tx-Tx=\theta_Y$ olduğundan $T+(-T)=\phi$ olup T'nin tersi $-T$ operatördür.

Soru 14.2 $M\neq\varnothing$, normlu bir X uzayının her hangi bir alt kümesi olsun. M'nin M^a sıfırlayanı, M üzerinde her yerde sıfır değerini alan ve X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan cümle olarak tanımlanır. M^a'nın X' dual uzayının kapalı bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Keyfi $f,g\in M^a$ ve α,β skalerlerini alalım. Her $x\in M$ için $(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)=0$ olduğundan $\alpha f+\beta g\in M^a$ olup bu da M^a kümesini lineer alt uzay yapar. Şimdi M^a'nın kapalı olduğunu gösterelim. Keyfi $f\in\overline{M^a}$ alalım. O halde $f_n\to f$ olacak şekilde M^a'da bir (f_n) dizisi vardır. Bu durumda

$$\sup_{x\neq\theta}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{\|x\|}\to 0$$

olur ki buradan $x\neq\theta$ olacak biçimde her $x\in M$ için $|f_n(x)-f(x)|\to 0$ yazılabilir. Ancak her n için $f_n\in M^a$ olduğundan $f(x)=0$ gerçeklenir. Ayrıca eğer $\theta\in M$ ise f lineer olduğundan $f(\theta)=0$ olur. Yani her $x\in M$ için $f(x)=0$ bulunur ki bu durumda $f\in M^a$ gerçeklenir. O halde M^a kapalıdır (kapanışını içeriyor).

Soru 14.3 Normlu bir X uzayı için X^a uzayını belirleyiniz ve $X^* \subset \{\theta\}^a$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $X^a = \{f \in X' : her\ x \in X\ için\ f(x) = 0\}$ olduğunu biliyoruz. Bu ise $X^a = \{\theta_{X'}\}$ olması demektir.
$\{\theta\}^a = \{f \in X' : f(\theta) = 0\}$ ve her $f \in X^*$ için $f(\theta) = 0$ olduğundan $X^* \subset \{\theta\}^a$ gerçeklenir.

Soru 14.4 X sonsuz boyutlu bir normlu uzay olduğunda X^* ile X' uzaylarının çakışmadığını gösteriniz.

Çözüm: 1. Yol: Biliyoruz ki her zaman $X' \subset X^*$ gerçeklenir. O halde lineer olup sınırlı (sürekli) olmayan bir fonksiyonel inşaa etmeliyiz. boy $X = \infty$ olduğundan X uzayı sayılamaz elemanlı bir $\mathcal{B}$ Hamel bazına sahiptir. O halde her n için $\|x_n\| = 1$ olacak şekilde lineer bağımsız $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ kümesi mevcuttur. $\mathcal{B}$ üzerinde f lineer fonksiyonelini her n için $f(x_n) = n$ ve $\mathcal{B} - A$ üzerinde sıfır olacak şekilde tanımlayalım. Şimdi f lineer fonksiyonelini $\mathcal{B}$'den X'e yine lineer olacak şekilde genişletelim: Her $x \in X$ için $x = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$ olacak şekilde $y_j(x) \in \mathcal{B}$ ve sıfırdan farklı c_j skalerleri mevcuttur. Şimdi f'nin bir lineer $\widetilde{f}$ genişlemesini $\widetilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j f\left(y_j(x)\right)$ ve $\widetilde{f}(\theta) = 0$ ile tanımlayalım. Ancak $\|x_n\| = 1$, $\left|\widetilde{f}(x_n)\right| = n$ olduğundan $\infty = \sup_n \left|\widetilde{f}(x_n)\right| \leq \sup_{\|x\|=1} \left|\widetilde{f}(x_n)\right|$ olur. Bu durumda $\widetilde{f}$ sınırlı değildir.
2. Yol: $X = l_1$ uzayını, l_∞ uzayının sup normu ile göz önüne alalım. $f : l_1 \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_k x_k$ ile tanımlayalım. f'nin lineer olduğu açıktır. Kabul edelim ki f sınırlı olsun. O halde her $x \in l_1$ için

$$|f(x)| \leq M \|x\|_\infty \tag{14.1}$$

olacak biçimde bir M pozitif tam sayısı bulabiliriz. Şimdi bir y dizisini şöyle tanımlayalım:

$$y_k = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq M+1 \\ 0, & k > M+1 \end{cases}$$

Böylece $\|y\|_\infty = \sup_k |y_k| = 1$ ve de $f(y) = M + 1$ elde edilir. O halde 14.1 eşitsizliğinden $M + 1 \leq M$ bulunur ki bu da çelişkidir. O halde f sınırlı değildir.

Soru 14.5 Bir X normlu uzayında $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = u$ ve $f \in X'$ olsun. O halde

$$f(u) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$ olsun. O halde $\lim_n S_n = u$ gerçeklenir. Keyfi $f \in X'$ alalım. f sürekli ve lineer olduğundan

$$
\begin{aligned}
f(u) &= f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) \\
&= f\left(\lim_n \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \\
&= \lim_n f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)
\end{aligned}
$$

elde edilir.