1 ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN CAUCHY GOURSAT TEOREMİ

Tanım1. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım2. Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a)$=$\gamma(b)$ ise, γ ya kapalı eğridir denir. Yani kapalı eğrilerin başlangıç ve bitim noktaları aynıdır.

Tanım3. Kendisini kesmeyen eğrilere basit eğri denir.

Tanım 4. Bir A kümesinin herhangi iki noktası tamamen A da bulunan bir eğri ile birleştirilebiliyorsa A ya bağlantılı (irtibatlı) küme denir.

Tanım 5. Açık ve bağlantılı olan bir A kümesine bölge denir.

Tanım 6. Eğer bağantılı bir A kümesi sınır noktalarından bazılarını ve ya tamamını içeriyorsa A ya yöre adı verilir.

Teorem1.1 (Cauchy Teoremi)

f fonksiyonu bir D yöresinde analitik ise ve f' türev fonksiyonu sürekli ise bu durumda

$$\int_C f(z)dz = 0$$

sağlanır. Cauchy teoremi bazen Cauchy integral teoremi bazen de Cauchy-Goursat teoremi olarak adlandırılır. Bu teoremin orjinal (ilk) ispatında yukarıda verildiği gibi f' türev fonksiyonunun D bölgesinin içinde sürekli olması koşulu konmuştur. Daha sonra L.Goursat bu koşulu kaldırarak teoremi ispatlamıştır. Bizim bu ders notlarında kullandığımız Goursat tarafından verilen aşağıdaki teoremdir.

Teorem1.2 (Cauchy-Goursat Teoremi)

Eğer f fonksiyonu pozitif yönde yönlendirilmiş, basit, kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerinde analitik ise bu durumda

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Aksi belirtilmediği sürece bu notlardaki sorularda, eğriler hep pozitif yönde yönlendirilmiş (saat yönünün tersine) olarak verilmiştir.

Soru1. $\displaystyle\int_{|z|=2} \sin z \; dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. C çevresi, $|z| = 2$ çemberi olup basit kapalı bir çevredir. Trigonometrik fonksiyonlar tam fonsiyon olduğundan $f(z) = \sin z$ fonksiyonu da tam fonsiyondur, dolayısıyla kompleks düzlemin tamamında analitiktir. Özel olarak C :

$|z|=2$ eğrisi üzerinde ve içinde de analitiktir. Cauchy-Goursat teoreminden

$$\int\limits_{|z|=2} \sin z dz = 0$$

bulunur.

Soru2. Aşağıdaki fonksiyonların analitik olduğu bölgeleri bulup, herbir fonksiyon için $\int\limits_C f(z)dz = 0$ olduğunu gösteriniz. Burada $C : |z| = 1$ çemberidir.

a. $f(z) = \dfrac{z^3}{z-3}$
b. $f(z) = ze^{-z}$
c. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$
d. $f(z) = \sec hz$
e. $f(z) = \tan z$

Çözüm.

a. $f_1(z) = z^3$, $f_2(z) = z-3$ fonksiyonları polinom olup kompleks düzlemin tamamında analitiktirler. $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ fonksiyonu $z=3$ noktasının dışındaki bölgede analitiktir. $z=3$ noktası C çevresinin dışında olduğundan f fonksiyonu basit, kapalı olan $C : |z| = 1$ çevresinin içerisinde ve üzerinde analitiktir. Cauchy-Goursat teoreminden $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{z^3}{z-3}dz = 0$ elde edilir.

b. $f(z) = \dfrac{z}{e^z}$ fonksiyonu için $f_1(z) = z$, $f_2(z) = e^z$ olsun. f_1 ve f_2 fonksiyonları tam fonksiyonlar olup f_2 fonksiyonunu sıfır yapan hiçbir z kompleks sayısı olmadığından f fonksiyonu da kompleks düzlemin tamamında analitiktir. Ayrıca $C : |z| = 1$ çevresi basit ve kapalı bir çevre olduğundan Cauchy-Goursat teoremi gereğince $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{z}{e^z}dz = 0$ bulunur.

c. $g_1(z) = 1$, $g_2(z) = z^2+2z+2$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{g_1(z)}{g_2(z)}$ fonksiyonu göz önüne alınırsa g_1 ve g_2 fonksiyonları tam fonksiyonlardır. $g_2(z) = 0$ için $z = -1 \pm i$ olup bu noktalar dışında kalan bölgede $g_2(z) = z^2+2z+2$ fonksiyonu analitiktir. $|-1 \pm i| = \sqrt{2} > 1$ olduğundan bu noktalar $|z| = 1$ çemberinin dışında kalırlar. Dolayısıyla f fonksiyonu $C : |z| = 1$ basit, kapalı çevresi içinde ve üzerinde analitiktir. Cauchy-Goursat teoremi gereğince $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{1}{z^2+2z+2}dz = 0$ yazılır.

d. $f(z) = \sec hz = \dfrac{1}{\cosh z} = \dfrac{2}{e^z+e^{-z}} = \dfrac{2e^z}{e^{2z}+1}$ yazılabilir. $f_1(z) = 2e^z$ ve

$f_2(z) = e^{2z} + 1$ fonksiyonları tam fonksiyonlardır. $e^{2z} + 1 = 0$ için

$$e^{2(x+iy)} = -1$$

olup

$$e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = -1$$

olur. Bu durumda $e^{2x} \cos 2y = -1$ ve $e^{2x} \sin 2y = 0$ olmalıdır. İkinci denklemde $e^{2x} = 0$ olamayacağından $\sin 2y = 0$ olmalıdır, buradan $y = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ elde edilir. İlk denklem dikkate alıdığında $y = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $x = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $e^{2z} + 1 = 0$ için $z = \dfrac{(2k+1)}{2}\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ yazılır. Bulunan z değerleri için $|z| = \left|\dfrac{(2k+1)}{2}\pi i\right| \geq \dfrac{\pi}{2} > 1$ olduğundan f_2 fonksiyonunu sıfır yapan z değerleri $C : |z| = 1$ çevresinin dışında kalır. f fonksiyonu C çevresinin içinde ve üzerinde analitik olduğundan Cauchy-Goursat teoremi kullanılarak $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \sec hzdz = 0$ bulunur.

e. $f(z) = \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \dfrac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = \dfrac{e^{2iz} - 1}{i\left(e^{2iz} + 1\right)}$ olacağından $e^{2iz} + 1 = 0$ için $e^{-2y}e^{2ix} = -1$ olup $e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x) = -1$ yazılır. Buradan $\begin{cases} e^{-2y} \cos 2x = -1 \\ e^{-2y} \sin 2x = 0 \end{cases}$ olacağından $x = \dfrac{(2k+1)}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $y = 0$ bulunur. Dolayısıyla $e^{2iz} + 1 = 0$ denkleminin kökleri $z = \dfrac{(2k+1)}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ olarak elde edilir. Bulunan bu z değerlerini kompleks düzlemden çıkardığımızda kalan bölgede f fonksiyonu analitik olacağından $|z| = 1$ basit ve kapalı C çevresinin içinde ve üzerinde de analitik olur. Cauchy-Goursat teoremi gereğince $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \tan zdz = 0$ elde edilir.

Soru3. γ çevresi $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ eğrileri ile oluşturulmuş, pozitif yönde yönlendirilmiş karenin çevresi olsun. Bu durumda

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z^2 - 7z}{z - 2} dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm. γ çevresi basit, kapslı bir çevredir. $f(z) = \dfrac{z^2 - 7z}{z - 2}$ fonksiyonu $z = 2$ dışında kompleks düzlemin tamamında analitiktir. $z = 2$ noktası γ çevresi içinde ve üzerinde değildir. Dolayısıyla f fonksiyonu γ çevresinin içinde ve üzerinde analitiktir. Cauchy-Goursat teoremi gereğince $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{z^2 - 7z}{z - 2} dz = 0$ bulunur.

Soru4. $C : |z| = 1$ çevresi olmak üzere $\int\limits_C Log(z{+}2)dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. Genel olarak $Log(z) = \ln|z| + iArgz$ olup, $Log(z)$ fonksiyonunun analitikliği incelenirken onu oluşturan $\ln|z|$ ve $Argz$ fonksiyonlarının analitikliğine bakılır. $Argz$ fonksiyonu negatif reel eksende analitik olmadığından $Log(z)$ fonksiyonunun analitiklik bölgesi

$$\mathbb{C}\backslash\{(x,y) \in \mathbb{C} :\ \mathrm{x} \leq 0,\ y = 0\}$$

şeklindedir. Dolayısıyla $Logf(z)$ şeklindeki bir fonksiyonun analitiklik bölgesi

$$\mathbb{C}\backslash\{(x,y) \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} f(z) \leq 0,\ \operatorname{Im} f(z) = 0\}$$

olup $Log(z+2)$ fonksiyonu

$$\mathbb{C}\backslash\{(x,y) \in \mathbb{C} :\ \mathrm{x} \leq -2,\ y = 0\}$$

bölgesinde analitiktir. C çevresi basit, kapalı pozitif yönde yönlendirilmiş bir çevre olup $Log(z{+}2)$ fonksiyonu C çevresi içinde ve üzerinde analitiktir. Cauchy-Goursat teoreminden $\int\limits_{|z|=1} Log(z+2)dz = 0$ yazılır.

Soru5. $|z| = 1$ çemberi üzerinde $\int e^z dz$ integralini hesaplayarak

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta)\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta)\, d\theta = 0$$

eşitliğini elde ediniz.

Çözüm. C:$|z| = 1$ çevresi basit, kapalı bir çevre olup $f(z) = e^z$ tam fonksiyonu C çevresi üzerinde ve içinde analitiktir. Cauchy-Goursat teoremi gereğince $\int\limits_{|z|=1} e^z dz = 0$ yazılır. Diğer yandan integrali hesaplamak için $z = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ dönüşümü yapılırsa $dz = ie^{i\theta} d\theta$ olacağından Euler formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{|z|=1} e^z dz = \int\limits_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = i\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta \\
&= i\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\left[\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\right](\cos\theta + i\sin\theta)d\theta \\
&= i\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\left[\cos(\sin\theta)\cos\theta - \sin\theta\sin(\sin\theta) + i(\cos(\sin\theta)\sin\theta + \cos\theta\sin(\sin\theta))\right]d\theta \\
&= i\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta + \theta)) + i\sin(\sin\theta + \theta)]d\theta \\
&= i\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta + \theta)d\theta - \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta + \theta)d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. İki kompleks sayının eşitliğinden

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta + \theta)d\theta = 0$$

ve

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta + \theta)d\theta = 0$$

bulunur.

Alıştırmalar

1. $|z| = 4$ çemberi ile kenarları $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ doğruları arasında bulunan karenin arasında kalan bölge B olsun. B bölgesinin sınırı γ olmak üzere aşağıdaki integralleri hesaplayınız (γ pozitif yönde yönlendirilmiştir).

a. $\displaystyle\int\limits_\gamma \frac{z+2}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}dz$

b. $\displaystyle\int\limits_\gamma \frac{z}{1-e^z}dz$

2. $C : |z + i| = \dfrac{1}{2}$ olmak üzere $\displaystyle\int\limits_C \frac{\cos z}{(z-3)^2(z^4-16)}dz$ integralini hesaplayınız.

3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z-\pi}dz$ integralini hesaplayınız.