2 ANTİ-TÜREV VE ÇEVREDEN BAĞIMSIZLIK

Theorem2.1.(Çevreden Bağımsızlık)

f fonksiyonu basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik ise, bu durumda f fonksiyonunun D bölgesindeki herhangi iki noktayı birleştiren çevreler boyunca integralleri, bu çevrelerin seçiminden bağımsızdır.

Soru1. $C : y = x^2$ eğrisinin $-1-i$ noktasından $1+i$ noktasına uzanan parçası olmak üzere

$$\int_C 3z^2 dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm. $f(z) = 3z^2$ fonksiyonu tam fonksiyon olup C eğrisini kapsayan basit bağlantılı bölgede analitik olacağından verilen integralin hesabı çevre seçiminden bağımsızdır. Dolayısıyla $\int_C 3z^2 dz$ integralini $y = x$ doğrusu üzerinden hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}\int_{-1-i}^{1+i} 3z^2 dz &= \int_{(-1,-1)}^{(1,1)} 3\,(x+iy)^2\,(dx+idy) = \int_{-1}^{1} 3(x^2 - x^2 + 2ixx)(dx + idx) \\ &= \int_{-1}^{1} 6x^2 i(1+i)dx = 6i(1+i)\frac{x^3}{3}\,\Big|_{x=-1}^{x=1} = 2i(1+i)2 = 4i(1+i).\end{aligned}$$

Tanım1. (Antitürev)

f bir D bölgesinde sürekli fonksiyon olsun. Eğer her $z \in D$ için $F^{'}(z) = f(z)$ olacak biçimde D bölgesinde analitik bir F fonksiyonu varsa bu durumda F fonksiyonuna f fonksiyonunun antitürevi denir.

Theorem2.2. f bir D bölgesinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun D de bir anti-türevi varsa bu durumda f fonksiyonunun D bölgesindeki herhangi iki noktayı birleştiren çevreler boyunca integralleri bu çevrelerin seçiminden bağımsızdır.

Theorem2.3. f fonksiyonu bir D bölgesinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun D bölgesindeki eğri integralleri bu eğrilerin seçiminden bağımsız ise bu durumda f fonksiyonunun D de bir F anti-türevi vardır.

Theorem2.4 (Genelleştirilmiş Cauchy-Goursat Teoremi)

C basit, kapalı bir çevre ve $C_1,\ C_2,\ C_3,...,C_n$ ler C çevresinin içinde bulunan ve ortak noktaları olmayan basit kapalı çevreler olsun. Eğer f fonksiyonu C ve $C_1,\ C_2,\ C_3,...,C_n$ lerin üzerinde ve bunlar arasında kalan bölgede analitik ise bu durumda

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z)dz$$

sağlanır.

Soru2. $\int\limits_{0}^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.$f(z) = \cos\frac{z}{2}$ fonksiyonu tam fonksiyon olup tüm kompleks düzlemde analitiktir, dolayısıyla $z = 0$ ve $z = \pi + 2i$ noktalarını birleştiren herhangibir eğriyi içeren bir D bölgesinde de analitik olur. Bu durumda D bölgesinde süreklidir. $f(z) = F'(z)$ olacak şekilde $F(z) = 2\sin\frac{z}{2}$ olup F fonksiyonu da D bölgesinde analitiktir, verilen integral yoldan bağımsızdır.

$$\int\limits_{0}^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz = 2\sin\frac{z}{2}\,|_{z=0}^{z=\pi+2i} = 2\sin\frac{\pi+2i}{2} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos i + \sin i\cos\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos i$$

olup $coshiz = \cos z$ olduğundan

$$\int\limits_{0}^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz = 2\cos i = 2\cos h1 = e + e^{-1}$$

bulunur.

Soru3. $\int\limits_{1}^{3}(z-2)^3dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $f(z) = (z-2)^3$ fonksiyonu polinom olduğundan tam fonksiyondur. Dolayısıyla anti-türevi mevcuttur. $z = 1$ ile $z = 3$ bağlayan hangi yol alınırsa alınsın verilen integralin sonucu aynı olur. $F'(z) = f(z) = (z-2)^3$ olacak şekilde analitik F fonksiyonu $F(z) = \frac{(z-2)^4}{4}$ olup

$$\int\limits_{1}^{3}(z-2)^3dz = \frac{(z-2)^4}{4}\,|_{z=1}^{z=3} = 0$$

elde edilir.

Soru4. γ eğrisi $z = 0$ noktasından ve negatif reel eksenden geçmeyen i noktasını $1+i$ noktasına birleştiren bir çevre olsun. Bu durumda $\int\limits_{\gamma} Logzdz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $Logz = \ln|z| + iArgz$ fonksiyonu negatif yarı eksende analitik değildir. Dolayısıyla γ eğrisini içeren pozitif yarı eksen üzerindeki bir D bölgesinde $Logz$ fonksiyonu analitiktir. Her $z \in D$ için $F(z) = zLogz - z$ için $f(z) = F'(z)$ olur. İntegralin çevreden bağımsızlığı kullanılarak

$$\int\limits_{\gamma} Logzdz = \int\limits_{i}^{1+i} Logzdz = (zLogz - z)\,|_{z=i}^{z=1+i} = \left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 1\right) + i\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

bulunur.

Soru5. γ eğrisi, $|z| = 1$ çemberinin pozitif yönlü sağ yarısı olmak üzere $\int\limits_{\gamma} \frac{\cos(Logz)}{z} dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $f(z) = \frac{\cos(Logz)}{z}$ fonksiyonu, sıfır ve negatif reel eksen dışında kalan bölgede analitiktir. γ eğrisi, $|z| = 1$ çemberinin pozitif yönlü sağ yarısı olduğundan $-i$ noktasını i noktasına birleştirir. D bölgesi, γ eğrisini içine alan negatif reel ekseni ve sıfır noktasını içermeyen bölge olarak alınırsa, $F(z) = \sin(Logz)$ olmak üzere $\forall z \in D$ için, $F^{'}(z) = f(z)$ olur. F fonksiyonu da D bölgesinde analitiktir. Çevreden bağımsızlık teoremi kullanılarak

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\cos(Logz)}{z} dz = \int\limits_{-i}^{i} \frac{\cos(Logz)}{z} dz = \sin(\frac{i\pi}{2}) - \sin(\frac{-i\pi}{2}) = 2i \sinh \frac{\pi}{2}$$

elde edilir.

Soru6. γ eğrisi pozitif yönlü $|z| = \pi$ çemberinin üst yarısı olmak üzere $\int\limits_{\gamma} \tan^2 z dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. γ eğrisi pozitif yönlü $|z| = \pi$ çemberinin üst yarısı olduğundan π noktasını -π noktasına bağlar. γ eğrisini içine alan, ancak $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\frac{k\pi}{2}$ noktalarını içermeyen bölgeye D diyelim. $f(z) = 1 + \tan^2 z$ fonksiyonu D bölgesinde analitiktir. Her $z \in D$ için $F(z) = \tan z$ için $F^{'}(z) = f(z)$ olup F fonksiyonu da D bölgesinde analitiktir. D bölgesi içinde herhangi yol üzerinden f fonksiyonunun integralinin değeri aynıdır, benzer şekilde $g(z) = 1$ fonksiyonu da D bölgesinde analitiktir ve g fonksiyonunun anti türevi $G(z) = z$ olup D içindeki herhangi iki noktayı birleştiren çevreler boyunca integralin hesabı çevrenin seçiminden bağımsızdır, çevreden bağımsızlık teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} \tan^2 z dz &= \int\limits_{\gamma} (-1 + 1 + \tan^2 z) dz = -\int\limits_{\gamma} dz + \int\limits_{\gamma} (1 + \tan^2 z) dz \\
&= -\int\limits_{-\pi}^{\pi} dz + \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1 + \tan^2 z) dz = -(-\pi - \pi) + \tan(-\pi) - \tan \pi = 2\pi
\end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırmalar

1. $\sqrt{z} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$; $0 < \theta < 2\pi$, $r > 0$ fonksiyonu veriliyor. μ, $-i$ noktasından i noktasına giden ve tamamıyla imajiner eksenin solunda kalan çevre olsun. Bu durumda

$$\int_\mu \sqrt{z}dz$$

integralini hesaplayınız.

2. $C = \left\{z : z = e^{i\theta},\ \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} = \{z : z \in \mathbb{C},\ |z| = 1,\ \operatorname{Re} z \geq 0\}$ olmak üzere $\int\limits_C \frac{1}{z}dz$ integralini hesaplayınız.

3. C çevresi köşeleri 0, 1, $1+i$ ve i olan birim kare ve $f(z) = \cos(3 + \frac{1}{z-3})$ olmak üzere

$$\int\limits_C f(z)dz$$

integralini hesaplayınız.

4. γ eğrisi $(0,0)$ noktasını $(1,0)$ noktasına birleştiren eğri olsun. $f(z) = |z|^2$ olmak üzere f fonksiyonunun analitik olduğu bölgeyi belirleyiniz. $\int\limits_\gamma f(z)dz$ integralinin hesabı için çevreden bağımsızlık teoremi kullanılır mı? Neden?

5. $\gamma(t) = t + it$, $-\alpha \leq t \leq \alpha$ ve $\alpha > 0$ sabit olmak üzere

$$\int\limits_\gamma \frac{2z}{z^2+1}dz$$

integralini hesaplayınız.