3 CAUCHY İNTEGRAL TEOREMİ

Teorem3.1.(Cauchy İntegral Formülü)

f fonksiyonu, pozitif yönde yönlendirilmiş basit kapalı C çevresinin üzerinde ve içinde analitik olsun. Eğer z_0, C içinde bulunan herhangibir nokta ise

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç1. Bu teorem gösteriyor ki, bir analitik fonksiyonun analitik olduğu herhangi bir noktadaki değeri bu noktayı çevreleyen bir kapalı çevre üzerindeki değeri yardımı ile hesaplanabilir.

Soru1. $C : |z| = 4$ olmak üzere $\int\limits_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i}dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. C çevresi basit kapalı bir çevre ve $g(z) = \frac{e^{3z}}{z-\pi i}$ fonksiyonu $z = \pi i$ noktası dışında kompleks düzlemin tamamında analitiktir. $z = \pi i$ noktası C çevresinin içinde olup $f(z) = e^{3z}$ fonksiyonu C çevresi içinde ve üzerinde analitiktir. Cauchy integral formülünden

$$\int\limits_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i}dz = 2\pi i f(\pi i) = 2\pi i e^{3\pi i}$$

bulunur.

Soru2. $C : |z| = 2$ olmak üzere $\int\limits_C \frac{1}{(z-1)(z^2+9)}dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. C çevresi basit kapalı bir çevre ve $g(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+9)}$ fonksiyonu 1 ve $\pm 3i$ noktalarında analitik değildir. Ancak bu noktalardan sadece $z = 1$ noktası C çevresi içindedir, dolayısıyla $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)}$ fonksiyonu C çevresi içinde ve üzerinde analitiktir. Cauchy integral formülü gereğince

$$\int\limits_C \frac{1}{(z-1)(z^2+9)}dz = 2\pi i f(1) = \frac{\pi i}{5}$$

yazılır.

Soru3. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)}dz$ integralinin değerini hesaplayınız.

Çözüm. $z_0 = \frac{\pi}{6}$ noktası $|z| = 1$ çemberinin içindedir, $|z| = 1$ çemberi basit kapalı bir çevre olup $f(z) = \sin^6 z$ fonksiyonu bu çemberin içinde ve üzerinde analitiktir. Cauchy integral formülünden

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$$

elde edilir.

Soru4. $I = \int\limits_{C:|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. C çevresi basit kapalı çevre, $z=1$ ve $z=2$ noktalarının her ikiside C çevresinin içinde ve $g(z) = \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}$ fonksiyonu bu noktalarda analitik değildir. Ancak bu formda Cauchy integral formülünü kullanamayız.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-2)}$$

olmak üzere $A=-1$, $B=1$ bulunur. Buradan

$$I = -\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)} dz + \int\limits_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-2)}$$

yazılacağından bu integrallere ayrı ayrı Cauchy integral formülü uygulanabilir. Çünkü $f(z) = \sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)$ fonksiyonu C çevresi içinde ve üzerinde analitiktir. Dolayısıyla

$$I = -2\pi i f(1) + 2\pi i f(2) = -2\pi i(-1) + 2\pi i = 4\pi i$$

yazılır.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4} dz$

b. $\int\limits_{|z|=2} \frac{3z+1}{z^2+1} dz$

2. C eğrisi $x=\pm 2$ ve $y=\pm 2$ doğrularının oluşturduğu karenin sınırı olmak üzere aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\int\limits_C \frac{e^{-z}}{z-i\frac{\pi}{2}} dz$

b. $\int\limits_C \frac{\cos z}{z\,(z^2+8)} dz$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z}dz$

b.

4. C eğrisi $|z|=3$ çemberi olsun. $g(z_0)=\displaystyle\int\limits_C \frac{2z^2-z-2}{z-z_0}dz$ ve $|z_0|\neq 3$ olmak üzere

a. $g(2)$ değerini hesaplayınız.

b. $|z_0|>3$ için $g(z_0)$ değerini hesaplayınız.

5. $C:|z|=1$ pozitif yönde yönlendirilmiş çevre olsun. $\displaystyle\int\limits_C \frac{ax^3+bxy}{z}dz$ integralinin çözülebilmesi için Cauchy integral formülünün kullanıldığı bilindiğine göre verilen integralin sonucunu bulunuz. Burada a,b birer reel sayıdır.

Soru6. γ eğrisi $|z|=\dfrac{\pi}{4}$ çemberi olmak üzere $\displaystyle\int\limits_\gamma (e^z+3z-1)\tan z dz$ integralini hesaplayınız.