6 KOMPLEKS TERİMLİ DİZİLER, SERİLER FONKSİYON DİZİLERİ VE SERİLERİ

Tanım1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $\mathbb{C}$ kümesi üzerine tanımlanmış bir f fonksiyonuna kompleks sayılar dizisi denir ve genellikle z_n ile gösterilir.

Tanım2. a) (z_n) kompleks düzlemde bir dizi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Verilen herhangibir $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün n doğal sayıları için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa, (z_n) dizisinin limiti z_0 dır denir.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

veya

$$z_n \to z_0$$

ile gösterilir.

b) Belli bir z_0 limitine sahip olan bir (z_n) dizisine yakınsak dizi denir.

c) Yakınsak olmayan bir diziye ıraksak dizi denir.

Teorem6.1. $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

olmasıdır.

Tanım3. (Cauchy Dizisi)

Keyfi bir (z_n) dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir N_ε pozitif tam sayısı varsa öyle ki $n, m \geq N_\varepsilon$ iken $|z_n - z_m| < \varepsilon$ sağlanıyorsa (z_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Teorem6.2. Kompleks sayıların bir (z_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (z_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Teorem6.3. $z_n = x_n + iy_n$ olmak üzere (z_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul (x_n) ve (y_n) dizilerinin Cauchy dizisi olmasıdır.

Soru1. $z_n = \dfrac{n}{2 - in}$ dizisinin yakınsadığı elemanı bulup, bu yakınsaklığı tanım yardımıyla gösteriniz.

Çözüm.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2 - in} = \frac{n(2 + in)}{4 + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4 + n^2} + i \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4 + n^2} = 0 + i = i$$

bulunur. Şimdi $z_n = \dfrac{n}{2 - in}$ dizisinin limitinin $z = i$ olduğunu gösterelim. Bunun için, her $\varepsilon > 0$ için $\left|\dfrac{n}{2 - in} - i\right| < \varepsilon$ olacak şekilde $n \geq n_0$ şartını sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının olduğunu göstermemiz gerekir. Buradan

$$\left|\frac{n}{2 - in} - i\right| \leq \frac{2}{|2 - |in||} = \frac{2}{|2 - n|} < \varepsilon$$

olup

$$\frac{2}{2 - n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} + 2 < n$$

olur.

$$n \geq \left[\left|\frac{2}{\varepsilon}+2\right|\right]+1=n_0$$

olmak üzere istenilen elde edilir.

Soru2. $z_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$ dizisinin limitini inceleyiniz.

Çözüm. $x_n=(-1)^n$ ve $y_n=\dfrac{1}{n+1}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}=(-1)^n$$

mevcut olmadığından (z_n) dizisinin limiti mevcut değildir.

Tanım4. Her $n\in\mathbb{N}$ için $z_n\in\mathbb{C}$ olsun. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ ifadesine kompleks terimli seri denir. $S_k=\sum\limits_{n=1}^{k} z_n$ olmak üzere S_k toplamına da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (S_k) dizisi yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi de yakınsaktır ve toplamı (S_k) dizisinin limitine eşittir. Yakınsak olmayan serilere ıraksak seri denir.

Teorem6.4. Kompleks terimli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi yakınsak ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$ sağlanır.

Teorem6.5. $z_n=x_n+iy_n$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul reel terimli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ serilerinin yakınsak olmasıdır.

Teorem6.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ serisi yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi de yakınsaktır.

Soru3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+i(-1)^n}{n^2}$ serisin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+i(-1)^n}{n^2}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi S_k olsun. Bu durumda $S_k=\sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{1+i(-1)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{1}{n^2}+i\sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ yazılır. $\sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{1}{n^2}$ dizisi harmonik dizi olup yakınsaktır, dolayısıyla $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ serisi yakınsaktır. $\sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ dizisi ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olup $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$serisi Leibnitz kriteri gereğince yakınsaktır. Bu durumda verilen seri yakınsaktır.

Soru4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+4i)^n}{5^n n^2}$ serisin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her n doğal sayısı için,

$$\left|\frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}\right| = \frac{|(3+4i)^n|}{5^n n^2} \leq \frac{5^n}{5^n n^2} = \frac{1}{n^2}$$

yazılır. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

olup $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ serisi harmonik seri olup yakınsaktır. Karşılaştırma testi gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(3+4i)^n}{5^n n^2}\right|$ serisi yakınsaktır. Teorem 6.6 gereğince mutlak yakınsak her kompleks seri yakınsak olduğundan verilen seri yakınsaktır.

Tanım5. (Kuvvet Serileri)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ...$ biçiminde verilen seriye z_0 etrafında bir kuvvet serisi denir. Burada z_0, a_0, a_1, ...birer kompleks sabitlerdir. Bir $R>0$ için $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ kuvvet serisi

$$D_R(z_0) = \{z : |z-z_0| < R\}$$

diskinde yakınsaktır. $C_R(z_0) = \{z : |z-z_0| = R\}$ çemberinin üzerindeki bazı noktalarda veya çember üzerindeki tüm noktalarda seri yakınsak değildir. Bu çembere serinin yakınsaklık çemberi denir. Yakınsaklık çembernininin dışında seri ıraksaktır. R yakınsaklık yarıçapı Cauchy kök testi, Cauchy-Hadamard testi ve bölüm testi kullanılarak bulunabilir.

Teorem 6.7. Bir $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ kuvvet serisi verilsin.

Oran testi: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ limiti var ise, bu limit serinin yakınsaklık yarıçapı olan R ye eşittir.

Kök testi: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ ise, $R = \dfrac{1}{\rho}$ ile verilir.

Soru5.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{3n+1}\right)^n (z-4)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Çözüm. $a_n = \left(\dfrac{n+2}{3n+1}\right)^n$ olup Cauchy kök testi kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+1} = \frac{1}{3}$$

elde edilir. Buradan $R = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ bulunur. Bu durumda verilen kuvvet serisi $|z-4| < 3$ bölgesinde yakınsaktır.

Soru6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Çözüm. $a_n = \dfrac{1}{n!}$ olup $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$ olduğundan seri her yerde yakınsaktır.

Teorem6.8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ile bu serinin terim terim türevi alınarak bulunan $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapları aynıdır.

Tanım6. A$\subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f_n : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. (f_n) dizisine fonksiyon dizisi denir.

Tanım7. (Noktasal Yakınsaklık)

$f_n : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}$ pozitif tamsayısı vardır öyleki $\forall n \geq n_0$ için $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ sağlanmasıdır.

Tanım8. (Düzgün Yakınsaklık)

$f_n : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ pozitif tamsayısı vardır öyleki $\forall z \in A$ için $n \geq n_0$ iken $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ sağlanmasıdır.

Tanım9. $f_n : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyon dizisi verilsin. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ifadesine fonksiyon serisi denir. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ fonksiyon serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu serinin $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} f_n(z)$ kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olmasıdır. Bu durumda serinin toplamı kısmi toplamlar dizisinin limitidir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = s(z) \Leftrightarrow \forall z \in A \text{ için } \lim_{k\to\infty} S_k = s(z).$$

Ayrıca $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ serisinin A üzerinde $s(z)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (S_k) dizisinin s fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasıdır.

Teorem6.9. (Weierstrass Kriteri)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ serisi bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun.

Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall z \in A$ için $|f_n(z)| \leq M_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak ise bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ serisi A kümesi üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teorem6.10. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $0 \leq R \leq \infty$ olsun. Bu durumda seri $D_R(z_0) = \{z : |z-z_0| < R\}$ diski tarafından kapsanan herbir kapalı alt diskte düzgün yakınsaktır.

Soru7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ serisi $\{z : |z| \leq 1\}$ kümesi üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm. $\forall z \in \{z : |z| \leq 1\}$ için $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass Kriteri gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ serisi $\{z : |z| \leq 1\}$ kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

Soru8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^2}$ serisinin reel eksen üzerinde ve reel eksen dışında düzgün ve mutlak yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm. Her $z \in \mathbb{R}$ için $|\cos(nz)| \leq 1$ olduğundan $\left|\frac{\cos(nz)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(nz)}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nz)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

yazılır. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ harmonik serisi yakınsak olduğundan Weierstrass Kriteri gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^2}$ serisi $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Tüm kompleks düzlemde analitik olan sınırlı bir fonksiyon Liouville teoremi gereğince sabittir. $Cosnz$ sabit olmadığından $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nz)|}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}$ olacak şekilde bi M sayısı bulmak mümkün değildir. Dolayısıyla reel eksen dışında verilen seri mutlak ve düzgün yakınsak değildir.

Theorem 6.11. A kompleks düzlemde bir bölge ve (f_n) ise A üzerinde analitik olan f_n fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer A bölgesinde bulunan her kapalı disk üzerinde (f_n) fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A bölgesinde analitiktir.

Soru9. $A = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ bölgesinde, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ fonksiyonunun A kümesinde analitik olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $x = 1$ doğrusunna uzaklığı δ olan ve tamamen A içinde kalan kapalı disk B olsun.

$$\left|n^{-z}\right| = \left|e^{-z \log n}\right| = \left|e^{(-x-iy)\log n}\right| = e^{-x \log n} = n^{-x}$$

yazabiliriz. Eğer $z \in A$ alınırsa, $x \geq 1+\delta$ ve böylece $|n^{-z}| \leq n^{-(1+\delta)}$ olur. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\delta)}$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass kriteri gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla f fonksiyonu A bölgesinde analitik fonksiyon belirtir.

Alıştırmalar

1. $a > 0$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-anz}}{(a+n)^2}$ serisinin $\operatorname{Re} z > 0$ bölgesinde analitik bir fonksiyon belirttiğini gösteriniz.

2. γ eğrisi $(0,0)$ noktasını $(0,i)$ noktasına bağlayan imajiner eksenin solunda kalan eğri olmak üzere $\displaystyle\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} dz = i \sin 1$ olduğunu gösteriniz.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

4. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{3^n} z^n$ olmak üzere $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4} dz$ integralini hesaplayınız.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{i}{n(n+1)} \right)$ serisinin karakterini inceleyiniz.

6. $f_n(z) = \dfrac{z}{n^2}$ şeklinde tanımlanan (f_n) fonksiyon dizisinin $z \leq D < \infty$ diskinde $f(z) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.