7 TAYLOR SERİ GÖSTERİMLERİ

Bir f fonksiyonu analitiklik bölgesi içinde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ şeklinde bir kuvvet serisi gösterimine sahiptir. Eğer $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ seçilirse bu kuvvet serisi Taylor serisi adını alır.

Teorem7.1.

Eğer f fonksiyonu $|z - z_0| = R$ çemberinin içinde analitik ise bu durumda $D_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$ açık diskinde bulunan her z için f fonksiyonun Taylor serisi f fonksiyonuna yakınsar, her $z \in D_R(z_0)$ için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

yazılır. Ayrıca $0 < r < R$ olacak şekilde bir r sayısı için $\overline{D_r(z_0)} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$ kapalı diskinde seri düzgün yakınsaktır. Özel olarak $z_0 = 0$ noktasındaki Taylor serisine Maclaurin serisi denir..

Soru1. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını elde ediniz.

Çözüm. $f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$, $f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$, $f'''(z) = \frac{6}{(1-z)^4}, ...,$ $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ olup $f^{(n)}(0) = n!$ yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \qquad |z| < 1 \\ \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Soru2. $f(z) = Logz$ fonksiyonunu $z_0 = 1$ noktası etrafında Taylor serisine açınız.

Çözüm. $f'(z) = \frac{1}{z}$, $f''(z) = -\frac{1}{z^2}$, $f'''(z) = \frac{2}{z^3}$, $f^{(4)}(z) = -\frac{6}{z^4}, ...,$ $f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{z^n}$ olup $f^{(n)}(1) = (-1)^n (n-1)!$ bulunur. Buradan

$$Logz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$$

elde edilir. Bu seri açılımı $|z - 1| < 1$ için geçerlidir. Çünkü $Logz$ fonksiyonunun analitik olduğu $z_0 = 1$ merkezli en büyük açık disk $|z - 1| < 1$ diskidir.

Soru3. $f(z) = \sin z$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \cos z = \sin(z+\frac{\pi}{2}), \\
f''(z) &= -\sin z = \sin\left(z+\frac{2\pi}{2}\right), \\
f'''(z) &= -\cos z = \sin(z+\frac{3\pi}{2}), \\
f^{(4)}(z) &= \sin z = \sin(z+\frac{4\pi}{2}), \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z) &= \sin(z+\frac{n\pi}{2})
\end{aligned}$$

olduğundan $f^{(n)}(0) = \dfrac{\sin n\pi}{2}$ olup

$$f^{(n)}(0) = \frac{\sin n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$f(z) = \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |z| < \infty$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \;\; |z| < \infty \\
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \;\; |z| < \infty \\
\frac{1}{1+z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \;\; |z| < 1 \\
\sinh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \;\; |z| < \infty \\
\cosh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \;\; |z| < \infty
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Soru3. e^{z^2} fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını elde ediniz.

Çözüm. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $|z| < \infty$ seri açılımından yararlanarak $e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$, $|z| < \infty$ bulunur.

Soru4. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ fonksiyonunu $z = 1$ noktası civarında Taylor serisine açınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{-1} \\ f'(z) &= -z^{-2} \\ f''(z) &= (-1)(-2)\,z^{-3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= (-1)^n\, n! z^{-(n+1)} \end{aligned}$$

olup $f^{(n)}(1) = (-1)^n\, n!$ olarak elde edilir. Buradan $|z-1| < 1$ için

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(z-1)^n$$

bulunur. İkinci yol olarak seri açılımını $\dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, z^n$, $|z| < 1$ olarak bildiğimiz $\dfrac{1}{1+z}$ fonksiyonundan yararlanabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(z-1)^n\,; \qquad\qquad |z-1| < 1$$

elde edilir.

Soru5. $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ fonksiyonunu $z = 1$ noktası civarında Taylor serisine açınız.

Çözüm. $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ fonksiyonunu $z = 1$ noktası civarında Taylor serisine açmak demek fonksiyonu $(z-1)$ in kuvvetleri cinsinden yazmak demektir. Bu açılımı yapabileceğimiz en geniş bölge $|z-1| < 2$ bölgesindir. Çünkü $z = -1$ noktasında fonksiyon singülerliğe sahip olup, $|z-1| < 2$ bölgesi fonksiyonun analitik kalacağı en geniş bölgedir, başka bir anlatımla seriye açtığımız nokta çemberin merkezi olmak üzere fonksiyon analitik kalacak şekilde bu çemberi ancak $z = -1$ noktasına kadar büyültebiliriz. Buradan

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}$$

yazılır. $\dfrac{z-1}{2}=u$ denilirse

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+u}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n; && |u|<1\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n; && \left|\frac{z-1}{2}\right|<1\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n; && |z-1|<2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Soru6. $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ fonksiyonunun $z=i$ noktası komşuluğunda Taylor açılımını elde ediniz.

Çözüm. $\dfrac{1}{1-z}$ fonksiyonunun $z=0$ noktası civarındaki Taylor seri açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z+i-i}=\frac{1}{1-(z+i)+i}=\frac{1}{(1+i)-(z+i)}=\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\dfrac{z+i}{1+i}}\\
&= \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n \ni |z+i|<|1+i|=\sqrt{2}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(1+i)^{n+1}} \ni |z+i|<\sqrt{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Soru7. $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını ve geçerli olduğu bölgeyi bulunuz.

Çözüm. Verilen fonksiyonu

$$\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3}=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

şeklinde iki ayrı fonksiyonun toplmı olarak yazarsak $A=-1$ ve $B=1$ bulunur.

İlk olarak $\dfrac{1}{z-3}$ fonksiyonunun $z=0$ civarındaki Taylor açılımını bulalım.

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{3\left(\frac{z}{3}-1\right)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}; \qquad |z|<3$$

elde edilir. $\dfrac{1}{z-2}$ fonksiyonunun $z=0$ civarındaki Taylor açılımı için ise

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n; \qquad \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

yazılır. Bu durumda

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

olup ilk seri açılımı $|z|<3$ bölgesinde ikinci seri açılımı $|z|<2$ bölgesinde geçerli olduğundan son seri açılımı bunların arakesiti olan $|z|<2$ bölgesinde geçerlidir. Buradan

$$\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}; \qquad |z|<2$$

elde edilir.

Soru8. $f(z)=\sin^3 z$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımnı bulunuz.

Çözüm. $\sin^3 z = \sin z(\frac{1-\cos 2z}{2})$ olup $\sin z$ ve $\cos z$ fonksiyonlarının Maclaurin seri açılımlarından yararlanarak istenilen elde edilir.

$$\begin{aligned}\sin^3 z &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}\right]\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)\left(\frac{(2z)^2}{2!}-\frac{(2z)^4}{4!}+\frac{(2z)^6}{6!}-...\right)\end{aligned}$$

olup $\mathbb{C}$ cismi kapalı olduğundan iki kompleks terimli serinin çarpımı kompleks terimli seri olacağından

$$\sin^3 z=\frac{1}{2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)\left(\frac{(2z)^2}{2!}-\frac{(2z)^4}{4!}+\frac{(2z)^6}{6!}-...\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

yazılır buradan iki serinin eşitliği kullanılarak $a_0=a_1=a_2=a_4=0$, $a_3=2$, $a_5=(-1)$ olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\sin^3 z=\frac{1}{2}\left(2z^3-z^5+...\right); \qquad |z|<\infty$$

bulunur. $\sin z$ ve $\cos z$ fonksiyonlarının Maclaurin seri açılımları açık şekilde f fonksiyonunda polinom olarak yazıldığında da yapılabilir.

$$\sin z = z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\frac{z^7}{5040}+...; |z|<\infty$$

ve $\cos 2z = 1 - 2z^2 + \frac{2}{3}z^4 - \frac{4}{45}z^6 + ...; \ |z| < \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sin^3 z &= \frac{1}{2}\left(\sin z - \sin z \cos 2z\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + ... - \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + ...\right)\left(1 - 2z^2 + \frac{2}{3}z^4 - \frac{4}{45}z^6 + ...\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + ... - \left(z - \frac{13}{6}z^3 + \frac{121}{120}z^5 - \frac{1093}{5040}z^7 + ...\right)\right] \\
&= z^3 - \frac{z^5}{2} + \frac{13}{120}z^7 - \frac{41}{3024}z^9 + ...; \ \ |z| < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

Soru9. $Log(1+z^2)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktası civarında Taylor seri açılımını elde ediniz.

Çözüm. $1 + (x+iy)^2 = 1 + x^2 - y^2 + 2ixy$ olup $Log(1+z^2)$ fonksiyonunun analitiklik bölgesi $xy = 0$ ve $1 + x^2 - y^2 \leq 0$ olacak şekildeki (x, y) noktalarını $\mathbb{C}$ kompleks düzlemden çıkarılması ile elde edilen bölgedir. Dolayısıyla verilen fonksiyonun $|z| < 1$ iken Taylor seri açılımı yapılır.

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n; \qquad |z| < 1$$

olup buradan

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}; \qquad |z| < 1$$

yazılır. $\frac{d}{dz}\left[Log(1+z^2)\right] = \frac{2z}{1+z^2}$ olduğundan

$$Log(1+z^2) = \int \frac{2z}{1+z^2}dz = \int 2z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} dz = 2\int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} dz; \qquad |z| < 1$$

bulunur. Son eşitlikte elde edilen seri analitik fonksiyonun seri gösterimi olduğundan $|z| < 1$ bölgesinde düzgün yakınsaktır, integral ile seri yer değiştirir. Burada verilen fonksiyonun $z = 0$ noktası civarında Taylor seri açılımı

$$Log(1+z^2) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int z^{2n+1} dz = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+2}}{2n+2}; \qquad |z| < 1$$

olarak bulunur.

Soru10. $f(z) = \frac{1}{z^2}$ fonksiyonunun $z = 1$ noktası civarındaki Taylor seri açılımını bulunuz.

Çözüm. $\dfrac{d}{dz}\left[-\dfrac{1}{z}\right]=\dfrac{1}{z^2}$ olup

$$\begin{aligned}\frac{-1}{z} &= -\frac{1}{z+1-1}=\frac{-1}{1+(z-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\,; \qquad |z-1|<1\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n\,; \qquad |z-1|<1\end{aligned}$$

yazılır. Analitik fonksiyonun seri gösterimi yakınsaklık bölgesinde düzgün yakınsak olduğundan, bu bölgede terim terime türevlenebilir. Buradan

$$\frac{d}{dz}\left[-\frac{1}{z}\right]=\frac{1}{z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}\,; \qquad |z-1|<1$$

elde edilir.

Alıştırmalar

1. $f(z)=\dfrac{z}{z-1}$ fonksiyonunun $z=0$ noktası civarındaki Taylor seri açılımını elde ediniz.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2z^n=\frac{1+z}{(1-z)^3}$ olduğunu gösterip açılımın geçerli olduğu bölgeyi belirleyiniz.

3. $f(z)=\tan z$ fonksiyonunun maclaurin seri açılımındaki ilk dört terimi bulup, açılımın geçerli olduğu bölgeyi belirleyiniz.

4. $f(z)=\log(1+z)$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını bulunuz.

5. $\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\,;\qquad |z-1|<1$ olduğunu gösteriniz.

6. $\dfrac{Log(1+z)}{Log(1-z)}$ fonksiyonunun $z=0$ noktası civarındaki Taylor seri açılımını elde ediniz.

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!z^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

8. $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{1+z}$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımındaki ilk dört terimi bulunuz.