8 LAURENT SERİ GÖSTERİMLERİ

Tanım1. C_n; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ kompleks sabitler olmak üzere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ serisine Laurent serisi denir. Burada

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

dir.

Teore8.1. (Laurent Teoremi)

$0 < r < R$ olmak üzere f fonksiyonu $A = \{z : r < |z - z_0| < R\}$ halka bölgesinde analitik olsun. Bu durumda $\forall z \in A$ için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

sağlanır. Bu seriye f fonksiyonunun z_0 etrafındaki Laurent serisi denir. Ayrıca A kümesinin herhangibir kapalı alt halkasında yakınsaklık düzgündür. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı denir.

Teorem8.2. Laurent açılımı bir tektir.

Soru1. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ fonksiyonunun $z = 0$ noktası civarındaki seri açılımını bulunuz.

Çözüm. $z = 0$ merkezli açık diskler $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ fonksiyonunun analitiklik bölgesinin içinde kalmadığından, bu nokta civarında yapılacak olan seri gösterimi Taylor serisi değildir. $\sin z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $|z| < \infty$ olduğundan bu seri açılımı $0 < |z| < \infty$ için de geçerlidir. Bu durumda

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}; \qquad 0 < |z| < \infty$$

bulunur.

Soru2. $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ fonksiyonunun $z_0 = 1$ noktası civarındaki Laurent seri açılımının ilk dört terimini bulunuz.

Çözüm. $z - 1 = u$ denilirse $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^2 e^{2u}}{u^3}$ olur. $e^u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$, $|u| < \infty$

olduğundan $e^{2u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n u^n}{n!}$, $|u| < \infty$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^2 e^{2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n u^n}{n!} \\ &= \frac{e^2}{u^3} \left\{ 1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \dots \right\} \\ &= \frac{e^2}{u^3} + \frac{2e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u} + \frac{e^2 4}{3} \dots; \qquad 0 < |u| < \infty \end{aligned}$$

veya

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{(z-1)} + \frac{e^2 4}{3} + \dots; \qquad 0 < |z-1| < \infty$$

olarak elde edilir.

Soru3. $f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$ fonksiyonunun $z = -2$ noktası civarındaki Laurent seri açılımındaki ilk beş terimi bulunuz.

Çözüm. $z + 2 = u$ denilirse $(z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = (u-5)\sin\frac{1}{u}$ olup sin fonksiyonunun seri açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \sin\frac{1}{u} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u^{2n+1}(2n+1)!}; \qquad u \neq 0 \\ &= \frac{1}{u} - \frac{1}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^5} - \frac{1}{7!u^7} + \cdots; \qquad u \neq 0 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} (u-5)\sin\frac{1}{u} &= (u-5)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^5} - \frac{1}{7!u^7} + \cdots\right) \\ &= \left(1 - u - \frac{1}{3!u^2} + \frac{5}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^4} - \cdots\right); \qquad u \neq 0 \end{aligned}$$

olup $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$

$$f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = 1 - (z+2) - \frac{1}{3!(z+2)^2} + \frac{5}{3!(z+2)^3} + \frac{1}{5!(z+2)^4} - \cdots,$$

bulunur.

Soru4. $f(z) = \frac{\sinh z}{(z-1)(z-4)}$ fonksiyonunun orijin etrafındaki üç seri açılımını elde ediniz.

Çözüm. f fonksiyonu $z = 1$ ve $z = 4$ noktaları dışında tüm kompleks düzlemde analitiktir. Dolayısıyla bu fonksiyonun orijin etrafında

a) $|z| < 1$ bölgesinde

b) $1 < |z| < 4$ simit bölgesinde ve

c) $|z| > 4$ bölgesinde seri açılımları vardır. Bunlardan $|z| < 1$ bölgesinde yapılacak olan seri açılımı Taylor seri açılımı diğerleri Laurent seri açılımıdır.

$$\frac{\sinh z}{(z-1)(z-4)} = \sinh z \left[-\frac{1}{3(z-1)} + \frac{1}{3(z-4)} \right]$$

olup orijin etrafındaki seri açılımları bilenen fonksiyonlar kullanılarak istenilen seri açılımları elde edilebilir.

a)

$$\begin{aligned} \frac{\sinh z}{(z-1)(z-4)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{12} \frac{1}{1-\frac{z}{4}} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n} \right]; \qquad |z| < 1 \end{aligned}$$

bulunur. İlk seri $|z| < \infty$, bölgesinde ikinci seri $|z| < 1$ bölgesinde son seri ise $\left|\frac{z}{4}\right| < 1$ bölgesinde geçerli olduğundan elde edilen seri $|z| < 1$ bölgesinde geçerlidir.

b)

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}; \qquad |z| > 1$$

ve

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n; \qquad |z| < 4$$

olup

$$\frac{\sinh z}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}} \right]; \qquad 1 < |z| < 4$$

bulunur.

c)

$$\frac{1}{z-4} = \frac{1}{z\left(1-\frac{4}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{z^n}; \qquad \left|\frac{4}{z}\right| < 1$$

ve

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}; \qquad |z| > 1 \Rightarrow |z| > 4$$

olup

$$\frac{\sinh z}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right]; \qquad |z|>4$$

bulunur.

Soru5. $\int\limits_{|z|=2} \sin\left(1+\dfrac{2}{z-1}\right) dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\sin\left(1+\dfrac{2}{z-1}\right) = \sin 1 \cos(\dfrac{2}{z-1}) + \cos 1 \sin(\dfrac{2}{z-1})$ olup $z-1=u$ denilirse

$$\sin\left(1+\frac{2}{u}\right) = \sin 1 \cos(\frac{2}{u}) + \cos 1 \sin(\frac{2}{u})$$

olur.

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{2}{u}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{2}{u}\right)^{2n}}{(2n)!}, \quad ....0<|u|<\infty \\
\cos(\frac{2}{z-1}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n}}{(z-1)^{2n}\,(2n)!}, \quad ....0<|z-1|<\infty
\end{aligned}$$

ve

$$\sin(\frac{2}{z-1}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n+1}}{(z-1)^{2n+1}\,(2n+1)!}, \quad ....0<|z-1|<\infty$$

olacağından

$$\int\limits_{|z|=2}\sin\left(1+\frac{2}{z-1}\right)dz = \int\limits_{|z|=2}\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n}}{(z-1)^{2n}\,(2n)!}dz + \int\limits_{|z|=2}\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n+1}}{(z-1)^{2n+1}\,(2n+1)!}dz$$

ve analitik fonksiyonun seri gösterimi yakınsaklık bölgesinde terim terime integrallenebileceğinden

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|z|=2}\sin\left(1+\frac{2}{z-1}\right)dz &= \sin 1\left[\int\limits_{|z|=2}\left(1-\frac{4}{2!\,(z-1)^2}+\frac{16}{4!\,(z-1)^4}-\cdots\right)dz\right] \\
&\quad +\cos 1\left[\int\limits_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{8}{3!\,(z-1)^3}+\cdots\right)dz\right]
\end{aligned}$$

yazılır. Cauchy integral ve türev formülleri kullanılarak $g(z)=1$ olmak üzere

$$\int\limits_{|z|=2}\sin\left(1+\frac{2}{z-1}\right)dz = 2\pi i\cos 1 g(1) = 2\pi i\cos 1$$

bulunur.

Soru6. $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-4)^3}$ fonksiyonunu $0<|z-4|<4$ bölgesinde Laurent serisine açınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z(z-4)^3} &= \frac{1}{(z-4)^3}\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{(z-4)^3}\left(1+\frac{1}{z-4+4}\right)\\
&= \frac{1}{(z-4)^3}\left(1+\frac{1}{4}\frac{1}{1+\dfrac{z-4}{4}}\right)\\
&= \frac{1}{(z-4)^3}\left[1+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-4}{4}\right)^n\right]; \qquad 0<\left|\frac{z-4}{4}\right|<1
\end{aligned}$$

olup

$$f(z)=\frac{1}{(z-4)^3}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-4)^{n-3}}{(4)^{n+1}}; \qquad 0<|z-4|<4$$

bulunur.

Alıştırmalar

1. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ fonksiyonunun $z_0=-2$ noktası civarındaki Laurent seri açılımının ilk dört terimini bulup geçerli olduğu bölgeyi belirtiniz.

2. $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$ fonksiyonunun $z_0=-2$ noktası civarındaki Laurent seri açılımının ilk dört terimini bulup geçerli olduğu bölgeyi belirtiniz.

3. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ fonksiyonunun aşağıda verilen bölgelerdeki seri açılımlarını elde ediniz.

a) $1<|z|<3$

b) $|z|>3$

c) $0<|z+1|<2$

4. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ fonksiyonunun aşağıda verilen bölgelerdeki seri açılımlarını elde ediniz.

a) $|z|<1$

b) $1<|z|<2$

c) $|z|<3$

5. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ fonksiyonunun $z=2$ ve $z=3$ noktaları civarındaki seri açılımlarını bulunuz.

6. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ fonksiyonunun orijin civarındaki Laurent seri açılımını bulunuz.

7. $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1+z^2)}$ fonksiyonunun orijin civarındaki Laurent seri açılımını bulunuz.

8. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z^k e^{\frac{1}{z}}\, dz$ integralini $e^{\frac{1}{z}}$ fonksiyonunun Laurent seri açılımını kullanarak hesaplayınız.

9. $f(z) = \dfrac{1}{\sinh z}$ fonksiyonunu $z = 0$ noktası civarındaki Laurent serisinin ilk beş terimini bulunuz.

10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \sinh z} dz = \frac{-\pi i}{3}$ olduğunu gösteriniz.

11. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ fonksiyonunun

a) $D_1 = \{z : 0 < |z-i| < 2\}$

b) $D_2 = \{z : 0 < |z-i| > 2\}$

bölgelerindeki Laurent seri gösterimlerini bulunuz.

12. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$ fonksiyonunun $z = 4$ noktası civarındaki üç ayrı seri açılımını elde ediniz.

13. $f(z) = \dfrac{1}{(z+2+2i)(z-1-i)}$ fonksiyonunun orijin civarındaki üç ayrı seri açılımını elde ediniz.