9 SİNGÜLERLİKLER VE SİNGÜLERLİKLERİN SINIFLANDIRILMASI

Tanım1. Eğer f fonksiyonu $z = z_0$ noktasında tanımlı olmayıp, z_0 noktasının her komşuluğunda f fonksiyonunun analitik olacağı en az bir nokta bulunuyorsa z_0 noktasına f fonksiyonun singüler noktası denir. Singüler noktalar ayrık ve ayrık olmayan olmak üzere ikiye ayrılır.

Tanım2. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değil fakat $R > 0$ için $0 < |z - z_0| < R$ de analitik ise bu durumda z_0 noktasına f fonksiyonun ayrık singüler noktası denir. Ayrık olmayan singüler noktaya ise ayrık olmayan singüler nokta denir. Başka bir deyişle z_0 f fonksiyonun singüler noktası olmak üzere, bu komşulukta fonksiyonun başka singüler noktası bulunmuyorsa z_0 noktasına f fonksiyonun ayrık singüler noktası denir. Örneğin; $f(z) = \dfrac{1}{z}$ fonksiyonu için $z = 0$ ayrık singüler noktadır. Ancak $g(z) = Logz$ fonksiyonu orijin ve negatif reel eksen üzereindeki tüm noktalarda ayrık olmayan singülerliğe sahiptir.

Tanım3. f fonksiyonu $z = z_0$ noktasında ayrık singülerliğe sahip olsun.

a) Kaldırılabilir Singülerlik: Eğer f fonksiyonunun z_0 noktasının bir komşuluğundaki Laurent seri açılımında $(z - z_0)$ ın negatif kuvvetleri bulunmuyorsa yani tüm b_n katsayıları sıfıra eşitse, z_0 noktasına f fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktasıdır denir. Uygun şekilde $f(z_0)$ yeniden tanımlanırsa f fonksiyonu z_0 noktasında analitik olur.

b) Kutup noktası: Eğer f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent seri açılımındaki b_n katsayılarından sonlu tanesi hariç diğerlerinin tümü sıfıra eşitse z_0 noktasına f fonksiyonunun bir kutup noktasıdır denir. Eğer m, $b_m \neq 0$ özelliğindeki en büyük sayı ise z_0, f fonksiyonunun m inci mertebeden kutup noktasıdır. Özel olarak $m = 1$ ise, z_0, f fonksiyonunun basit kutup noktasıdır denir.

c) Esas singüler nokta: f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent seri açılımının esas kısmında sonsuz sayıda terim varsa, yani Laurent seri açılımında sonsuz çoklukta b_m katsayısı sıfırdan farklı ise, z_0 noktası f fonksiyonun esas singüler noktasıdır denir.

Teorem9.1. f fonksiyonu $z_0 \in B$ deki ayrık singülerliği hariç bir B bölgesinde analitik olsun.

i) z_0 ın bir kaldırılabilir singüler nokta olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki üç koşuldan birisinin gerçeklenmesidir.

1. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ vardır
2. $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$
3. f fonksiyonu z_0 ın delinmiş bir komşuluğunda sınırlıdır.

ii) z_0 noktasının f fonksiyonunun m. mertebeden kutup noktası olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ limitinin var olmasıdır. $(m \neq 1)$. $m \geq 1$ ise $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ olur.

iii) z_0 noktasının f fonksiyonunun basit kutup noktası olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ limitinin var ve sıfırdan farklı olmasıdır.

Teorem9.2. z_0 noktasının f fonksiyonunun m. mertebeden kutup noktası olması için gerek ve yeter koşul z_0 noktasının $g(z)=(z-z_0)^m f(z)$ fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktası ve $g(z_0)\neq 0$ olmasıdır.

Soru1. $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$ fonksiyonunun singüler noktasının cinsini belirleyiniz.

Çözüm. $z_0=0$ noktası f fonksiyonunun ayrık singüler noktasıdır.

$$\lim_{z\to 0}\frac{z-\sin z}{z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{3z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{6z}=\frac{1}{6}$$

olduğundan $z_0=0$ noktası f fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktasıdır. İkinci çözüm yolu olarak verilen f fonksiyonu $z_0=0$ noktası civarında Laurent serisine açılarak da yapılabilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\frac{z-\sin z}{z^3} &= \frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\frac{z^6}{9!}\end{aligned}$$

olup f fonksiyonu $z_0=0$ noktası civarında Laurent seri açılımının esas kısmında hiç terim bulunmadığından z_0 noktası kaldırılabilir singüler noktadır. f fonksiyonu $z_0=0$ noktasında $\dfrac{1}{6}$ olarak yeniden tanımlanırsa f fonksiyonu tüm kompleks düzlemde analitik olur.

Soru2. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ fonksiyonunun singüler noktasının çeşitini belirleyiniz.

Çözüm. $z_0=0$ noktasında f fonksiyonu analitik olmayıp bu noktanın her komşuluğundaki bazı noktalarda analitiktir. Dolayısıyla $z_0=0$ noktası f fonksiyonunun singüler noktasıdır. $z_0=0$ noktası civarında f fonksiyonunun Laurent serisi her $z\in\mathbb{C}/\{0\}$ için

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots$$

olup Laurent açılımının esas kısmında sonsuz çoklukta terim olduğundan $z_0=0$ noktası f fonksiyonunun esas singüler noktasıdır.

Soru3. $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^5}$ fonksiyonunun singüler noktasının çeşitini belirleyiniz.

Çözüm. $z_0=0$ noktasında f fonksiyonu analitik olmayıp bu noktanın her komşuluğunda f fonksiyonunun analitik olduğu en az bir nokta olduğundan $z_0=0$ noktası f fonksiyonunun singüler noktasıdır.

$$\lim_{z\to 0}z^3\frac{\sin^2 z}{z^5}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2=1$$

olup $\lim\limits_{z\to 0} z^3 \dfrac{\sin^2 z}{z^5}$ limiti mevcut ve sıfırdan farklı olduğundan $z_0 = 0$ noktası 3. mertebeden kutup noktasıdır. $z_0 = 0$ noktası komşuluğunda fonksiyonun Laurent seri açılımı yapıldığında da aynı sonuç elde edilir.

Soru4. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ fonksiyonunun $z_0 = -2$ singüler noktasının türünü belirleyiniz.

Çözüm. $\lim\limits_{z\to -2} \dfrac{z}{(z+1)(z+2)} = \infty$ olduğundan $z_0 = -2$ kutup noktasıdır.

$\lim\limits_{z\to -2} (z+2) f(z)$ limiti var ve sıfırdan farklı olduğundan $z_0 = -2$ kutubu f fonksiyonunun basit kutup noktasıdır. İkinci yol olarak fonsiyonun $z_0 = -2$ civarındaki Laurent serisi

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} = \frac{2}{z+2} + \frac{1}{1-(z+2)} \\ &= \frac{2}{z+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (z+2)^n, \qquad 0 < |z+2| < 1 \end{aligned}$$

olup, bu açılımın esas kısmı sadece $\dfrac{2}{z+2}$ teriminden oluşmaktadır. Bu ise $z_0 = -2$ noktasının basit kutup olduğunu verir.

Alıştırmalar

1. $f(z) = \dfrac{e^{-z}\cos z}{z^2}$ fonksiyonu için $z_0 = 0$ noktasının singülerliğinin çeşitini belirleyiniz.

2. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ fonksiyonunun singüler noktasını bulup çeşitini belirleyiniz.

3. $g(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$ fonksiyonunun kutup noktalarını ve mertebelerini bulunuz.

4. $f(z) = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$ fonksiyonunun singüler noktalarını belirleyip ayrık olup olmadıklarını inceleyiniz.

5. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılan noktalarda kaldırılabilir singülerliğe sahip olup olmadığını inceleyiniz.

a) $f(z) = \dfrac{\cos(z-1)}{z^2}, \qquad z_0 = 0$

b) $f(z) = \dfrac{z}{z-1}, \qquad z_0 = 1.$