10 REZİDÜ TEORİSİ

Tanım1. f fonksiyonu z_0 noktasında ayrık singülerliğe sahip olsun. Bu durumda f fonksiyonu $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ bölgesinde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Laurent seri açılımına sahiptir. Bu açılımda $\dfrac{1}{z - z_0}$ ifadesinin katsayısı olan b_1 sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki rezidüsü denir ve $Res(f, z_0) = b_1$ ile gösterilir. C pozitif yönlü basit kapalı çevresi $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ bölgesinin içinde kalan ve z_0 noktasını içeren çevre olsun. Bu durumda

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1$$

sağlanır.

Uyarı1. Bizi C kapalı çevresinin içinde kalan singüler noktaların rezidüsü ilgilendirir.

Teorem10.1. (Rezidü Teoremi)

C pozitif yönlü basit kapalı bir çevre olmak üzere $w = f(z)$ fonksiyonu C içinde bulunan sonlu $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ noktaları dışında C çevresinin içinde ve üzerinde analitik ise

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res f(z)$$

sağlanır.

Uyarı2. Rezidü hesaplanırken aşağıdaki üç yolu izlemek yarar sağlar:

a)Laurent seri açılımı yapılarak rezidü hesabı en genel yoldur ve tüm singüler nokta çeşitlerinde kullanılabilir. Dolayısıyla fonksiyonun verilen noktada Laurent açılımı biliniyor veya rahatlıkla yazılabiliyorsa bu yolla rezidü bulunabilir.

b) Verilen singülerliğin kaldırılabilir olup olmadığına bakılır, sözkonusu singülerlik kaldırılabilir singülerlik ise, fonksiyonun bu noktadaki rezidüzsü sıfırdır. Eğer verilen noktada kaldırılabilir singülerlik sözkonusu değilse, kaçıncı mertebeden kutup noktası olduğu aranır, kutubun mertebesi önce sezgisel olarak belirtilir ve bunun doğru olup olmadığı bir önceki bölümde verilen yöntemlerle bulunur. Eğer z_0 m. mertebeden kutup noktası ise $Res(f, z_0)$ aşağıdaki limit yardımıyla hesaplanır.

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

c) Esas singülerlik durumunda, rezidü hesabı için kutup noktasındakine benzer yöntemler yoktur. Çok kez fonksiyonu Laurent serisine açarak rezidü bulmak gerekir.

Soru1. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z-3)}$ fonksiyonunun $z=3$ noktasındaki singülerliğinin çeşitini belirleyip $I=\displaystyle\int_{|z-3|=\frac{1}{2}}\frac{1}{(z+2)(z-3)}dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $C:|z-3|=\dfrac{1}{2}$ çevresi basit kapalı bir çevre olup $z=3$ noktası dışında C çevresinin içinde ve üzerinde analitiktir. Rezidü teoreminden

$$I=2\pi i Res(f,3)$$

sağlanır. $Res(f,3)$ değerini f fonksiyonunu $z=3$ civarında Laurent serisine açarak veya kutup noktası olduğunu gösterip yukarıdaki limit yardımıyla da hesaplayabiliriz. Verilen Fonksiyonun $0<|z-3|<5$ bölgesindeki Laurent seri açılımı

$$\begin{aligned}
.f(z) &= \frac{1}{(z-3)}\frac{1}{(z+2)}=\frac{1}{(z-3)}\frac{1}{z-3+3+2}=\frac{1}{5(z-3)}\frac{1}{1+\frac{z-3}{5}} \\
&= \frac{1}{5(z-3)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{5}\right)^n ;........0<|z-3|<5 \\
&= \frac{1}{5(z-3)}-\frac{1}{25}+\frac{1}{125}(z-3)^2+\cdots ;........0<|z-3|<5
\end{aligned}$$

olup, bukunan açılımın esas kısmı $\dfrac{1}{5(z-3)}$ olduğundan $z=3$ birinci mertebeden kutup noktasıdır ve $b_1=\dfrac{1}{5}$ bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i Res(f,3) \\
&= 2\pi i\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Rezidü kullanmadan integral Cauchy integral formülü ile de hesaplanabilir.

Soru2. $f(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)(z^4+2)}$ fonksiyonunun $z=0$ noktasındaki rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm. $z=0$ f fonksiyonunun singüler noktası değildir. Dolayısıyla $Res(f,0)=0$ yazılır.

Soru3. $\displaystyle\int_{|z|=2}\sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right)dz=4\pi i\cos 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. f fonksiyonu $z=1$ noktası dışında $|z|=2$ çemberi içinde ve üzerinde analitiktir. $f(z)=\sin 1\cos\left(\dfrac{2}{z-1}\right)+\sin\left(\dfrac{2}{z-1}\right)\cos 1$ olup f fonksiyonunun $z=1$ civarındaki Laurent seri açılımı

$$f\left(z\right)=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}2^{2n}}{\left(2n\right)!\left(z-1\right)^{2n}}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}2^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!\left(z-1\right)^{2n+1}};.......0<\left|z-1\right|<\infty$$

bulunur. Buradan $b_1=2\cos 1$ elde edilir. Dolayısıyla Rezidü teoremi gereğince

$$\int\limits_{|z|=2}\sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right)dz=2\pi i b_1=4\pi i\cos 1$$

elde edilir.

Soru4. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=3}\frac{z+\sin z}{\left(z-1\right)^{3}\left(z-6\right)}dz=2\pi i\,Res(f,1)$ olduğunu gösterip değerini bulunuz.

Çözüm. $\phi\left(z\right)=\dfrac{z+\sin z}{\left(z-6\right)}$ olmak üzere $f\left(z\right)=\dfrac{\phi\left(z\right)}{\left(z-1\right)^{3}}$ denilirse f fonksiyonu $z=1$ noktası dışında $C:|z-1|=3$ çevresi içinde ve üzerinde analitiktir. C çevresi basit kapalı bir çevre olup, $z=1$ singüler noktasının görünen mertebesi 3 tür. $\phi\left(1\right)=-\dfrac{1+\sin 1}{5}\neq 0$ olduğundan görünen mertebe gerçek mertebeye eşittir. Dolayısıyla $z=1$ noktası f fonksiyonunun 3. mertebeden kutup noktasıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\left(z-z_0\right)^{3}f\left(z\right)\right]\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z+\sin z}{z-6}\right)\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{\left(1+\cos z\right)\left(z-6\right)-\left(z+\sin z\right)}{\left(z-6\right)^{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1+\cos z}{z-6}-\frac{z+\sin z}{\left(z-6\right)^{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{-\left(z-6\right)\sin z-1-\cos z}{\left(z-6\right)^{2}}-\frac{\left(1+\cos z\right)\left(z-6\right)^{2}-2\left(z-6\right)\left(z+\sin z\right)}{\left(z-6\right)^{4}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{5\sin 1-1-\cos 1}{25}-\frac{25\left(1+\cos 1\right)+10\left(1+\sin 1\right)}{625}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Rezidü teoremi gereğince $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=3}\frac{z+\sin z}{\left(z-1\right)^{3}\left(z-6\right)}dz=2\pi i\,Res(f,1)$

olup $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=3}\frac{z+\sin z}{\left(z-1\right)^{3}\left(z-6\right)}dz=\pi i\frac{135\sin 1-40-50\cos 1}{625}$ elde edilir.

Soru5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-2)^2(z-1)^4}dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $C : |z| = 3$ çevresi basit kapalı çevre olup $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)^2(z-1)^4}$ fonksiyonunun singüler noktaları olan $z = 1$ ve $z = 2$ noktaları çevrenin içine düşmektedir. Bu noktalar dışında f fonksiyonu C çevresinin içinde ve üzerinde analitiktir. Rezidü teoreminden

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-2)^2(z-1)^4}dz = 2\pi i\left[Res(f,1) + Res(f,2)\right]$$

yazılır. $\phi(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^4}$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z-2)^2}$ yazılır, $\phi(2) \neq 0$ olduğundan $z = 2$ singüler noktası için görünen mertebe gerçek mertebesi olup, $z = 2$ singüler noktası 2. mertebeden kutup noktasıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} Res(f,2) &= \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[(z-2)^2 f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to 2}\frac{2z(z-1)-4z^2}{(z-1)^5} = -12 \end{aligned}$$

bulunur. $\psi(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)^2}$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-1)^4}$ yazılırsa $\psi(1) \neq 0$ olduğundan $z = 1$ singüler noktası için görünen mertebe gerçek mertebesi olup, $z = 1$ singüler noktası 4. mertebeden kutup noktasıdır. Bu durumda

$$Res(f,1) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left[(z-1)^4 f(z)\right] = \frac{1}{6}\lim_{z\to 1}\left(\frac{-24z-48}{(z-2)^5}\right) = 12$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \int\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-2)^2(z-1)^4}dz &= 2\pi i\left[Res(f,1) + Res(f,2)\right] \\ &= -12 + 12 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Soru6. $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ fonksiyonunun singüler noktalarının cinsini belirleyip bu noktalardaki rezidülerini bulunuz.

Çözüm. $z = x + iy$ olmak üzere $e^z - 1 = 0$ olacak şekildeki z noktaları f fonksiyonunun singüler noktalarıdır. $e^z - 1 = 0$ denklemi çözülürse $z = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ bulunur. $n = 0$ için $z = 0$ singüler noktası elde edilir. f fonksiyonun $z = 0$ civarındaki Laurent serisi

$$f(z) = \frac{z}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} - 1} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan $z = \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right)\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$ olacağından $a_0,\ a_1,\ a_2$ katsayıları $a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{12}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $0 < |z| < \infty$ için

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \cdots$$

bulunur. Bu açılımın esas kısmında hiç terim bulunmadığından $z = 0$ singüler noktası kaldırılabilir singüler noktadır ve $Res(f, 0) = 0$ yazılır.

$$z = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

singüler noktaları için

$$\lim_{z \to 2n\pi i} (z - 2n\pi i)\,\frac{z}{e^z - 1} = \frac{2z - 2n\pi i}{e^z} = 2n\pi i$$

olup bu limit mevcut ve sıfırdan farklı olduğundan $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için $2n\pi i$ noktaları basit kutup noktalarıdır ve rezidü değerleri limit değeri olan $2n\pi i$ değeridir. $Res(f, 2n\pi i) = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ elde edilir.

Soru7. $f\left(z\right) = \frac{e^{2z}}{\left(z-1\right)^3}$ fonksiyonu veriliyor. $Res(f, 1)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm. $z_0 = 1$ noktası f fonksiyonunun ayrık singüler noktasıdır.

$$\lim_{z \to 1} \left(z-1\right)^3 \frac{e^{2z}}{\left(z-1\right)^3} = e^2$$

limiti mevcut ve sıfırdan farklı olduğundan $z_0 = 1$ noktası f fonksiyonunun 3. mertebeden kutup noktasıdır.

$$Res(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\left(z-1\right)^3 \frac{e^{2z}}{\left(z-1\right)^3} \right) = 2e^2$$

bulunur. İkinci yol olarak $z \neq 1$ olmak üzere f fonksiyonu

$$\frac{e^{2z}}{\left(z-1\right)^3} = \frac{e^2}{\left(z-1\right)^3} + \frac{2e^2}{\left(z-1\right)^2} + \frac{2e^2}{\left(z-1\right)} + \frac{4}{3}e^2 + \frac{2e^2}{3}\left(z-1\right) + \cdots$$

şeklinde Laurent seri açılımına sahiptir. Bu açılımın esas kısmı

$$\frac{e^2}{\left(z-1\right)^3} + \frac{2e^2}{\left(z-1\right)^2} + \frac{2e^2}{\left(z-1\right)}$$

olup buradan $z_0 = 1$ noktasının f fonksiyonunun 3. mertebeden kutup noktası olduğu ve $Res(f, 1) = 2e^2$ olduğu elde edilir.

Uyarı1. $p(z_0) \neq 0,\ q(z_0) = 0,\ q'(z_0) \neq 0$ olmak üzere $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ biçiminde verilen fonksiyonlar için $Res(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ formülüyle hesaplanabilir.

Alıştırmalar

1. $f(z)=\dfrac{\left(z^3-1\right)(z+2)}{\left(z^2-1\right)^3}$ fonksiyonunun $z=1$ noktasındaki rezidüsünü hesaplayınız.

2. $f(z)=\dfrac{\left(z^2-2z\right)(z+2)}{(z+1)^2\left(z^2+4\right)}$ fonksiyonunun singüler noktalarını belirleyip bu noktalardaki rezidüleri hesaplayınız.

3. Aşağıdaki fonksiyonların singülerliklerinin çeşitini belirleyip, bu noktalardaki rezidülerini bulunuz.

a) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^4+3z^2+4}$

b) $g(z)=\dfrac{e^{-z}\cos z}{z^2}$

4. Aşağıdaki fonksiyonların singülerliklerinin çeşitini belirtiniz ve $z=0$ noktasındaki rezidülerini bulunuz.

a) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$

b) $g(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^5}$

c) $h(z)=\dfrac{1}{\sin z^2-z^2}$

5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{z^2}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}dz$ integralini rezidü yardımıyla hesaplayınız.

6. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{z^2}{(z-2)^2(z-1)^4}dz$ integralini rezidü yardımıyla hesaplayınız.

7. $n=1,2,3,\cdots$ olmak üzere $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^n}dz$ integralini rezidü yardımıyla hesaplayınız.