11 TRİGONOMETRİK İNTEGRALLERİN REZİDÜLER İLE HESABI

F fonksiyonu $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ ya göre rasyonel bir fonksiyon olmak üzere $\int\limits_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$ biçimindeki integrallerin hesabı yapılırken $|z| = 1$ için $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere $z = e^{i\theta}$ dönüşümü yapılır. Bu dönüşümden sonra z değişkenin rasyonel fonksiyonunun bir integrali elde edilir, elde edilen integral rezidü ile hesaplanır. $|z| = 1$ için $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere $z = e^{i\theta}$ dönüşümü yapıldığında

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

ve

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

olarak bulunur.

Soru1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta} = \frac{2\pi}{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $|z| = 1$ için $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere $z = e^{i\theta}$ dönüşümü yapılırsa $\sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$ olacağından

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta} &= \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{iz}}{5 + \frac{2}{iz}(z^2 - 1)} dz = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 + 5iz - 2} \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(z + \frac{i}{2}\right)(z + 2i)}
\end{aligned}$$

yazılır. $z = \frac{-i}{2}$ ve $z = -2i$ noktaları $f(z) = \frac{1}{\left(z + \frac{i}{2}\right)(z + 2i)}$ fonksiyonu için singüler noktalar olup bunlardan sadece $z = \frac{-i}{2}$, $C : |z| = 1$ basit, kapalı çevresi içindedir. Bu nokta dışında f fonksiyonu C çevresi içinde ve üzerinde analitiktir. Rezidü teoremi gereğince

$$\frac{1}{2} \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(z + \frac{i}{2}\right)(z + 2i)} = \frac{1}{2} 2\pi i Res(f, \frac{-i}{2})$$

olup

$$\lim_{z\to\frac{-i}{2}}\left(z+\frac{i}{2}\right)\frac{1}{\left(z+\frac{i}{2}\right)(z+2i)}=\frac{2}{3i}$$

limiti mevcut ve sıfırdan farklı olup $z=\dfrac{-i}{2}$ noktası basit kutup noktasıdır. Dolayısıyla

$$Res(f,\frac{-i}{2})=\frac{2}{3i}$$

olup

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z+\frac{i}{2}\right)(z+2i)}=\pi i\frac{2}{3i}=\frac{2\pi}{3}$$

bulunur.

Soru2. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$ integralini rezidü yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm. $|z|=1$ için $0\le\theta\le 2\pi$ olmak üzere $z=e^{i\theta}$ dönüşümü yapılırsa $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$, $\sin\theta=\dfrac{z^2-1}{2iz}$ olur. Bu dönüşüm altında $C:|z|=1$ olmak üzere

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}=\int\limits_C\frac{\frac{1}{iz}}{1-\frac{z^4-2z^2+1}{4z^2}}dz=\frac{-4}{i}\int\limits_C\frac{z}{z^4-6z^2+1}dz$$

olup buradan $z^4-6z^2+1=0$ için $z_1=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $z_2=-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $z_3=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $z_2=-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ bulunur. $f(z)=\dfrac{z}{z^4-6z^2+1}$ fonksiyonu z_1, z_2, z_3, z_4 noktaları dışında kompleks düzlemde analitiktir. Bunlardan sadece z_1, z_2 birim çemberin içindedir. C basit kapalı eğri olduğundan Rezidü teoremi gereğince

$$\frac{-4}{i}\int\limits_C\frac{z}{z^4-6z^2+1}dz=\frac{-4}{i}2\pi i\left[Res(f,z_1)+Res(f,z_2)\right]$$

yazılır. z_1, z_2 noktaları basit kutup noktalarıdır. Gerçekten

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)z}{z^4-6z^2+1}=\lim_{z\to z_1}\frac{2z-z_1}{4z^3-12z}=-\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

olup bu limit mevcut ve sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $Res(f,z_1)=-\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$ bulunur. Benzer şekilde

$$Res(f,z_2)=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)=\lim_{z\to z_2}\frac{2z-z_2}{4z^3-12z}=-\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} &= \int_C \frac{\frac{1}{iz}}{1-\frac{z^4-2z^2+1}{4z^2}} dz = \frac{-4}{i} 2\pi i \left(-\frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\right) \\ &= \pi\sqrt{2}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Soru3. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $|z| = 1$ için $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere $z = e^{i\theta}$ dönüşümü yapılırsa $d\theta = \frac{dz}{iz}$, $\cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}$ olur.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} &= \int_{C:|z|=1} \frac{1}{iz} \frac{2z}{10z-4z^2-4} dz = \frac{1}{i} \int_C \frac{dz}{5z-2z^2-2} \\ &= -\frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\end{aligned}$$

olup $5z - 2z^2 - 2 = 0$ için $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$ bulunur. Sadece $z_2 = \frac{1}{2}$ singüler noktası C çevresi içindedir. Eğri basit kapalı olup rezidü teoreminden

$$f(z) = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$$

olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} = -\frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)} = 2\pi i \left(-\frac{1}{2i}\right) Res(f, \frac{1}{2})$$

yazılır. $z_2 = \frac{1}{2}$ noktası f fonksiyonunun basit kutup noktası olup

$$Res(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{1}{z-2} = -\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} = -\pi Res(f, \frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$$

elde edilir.

Alıştırmalar

1. $0 < |a| < 1$ olmak üzere $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$ integralini rezidü yardımıyla hesaplayınız.

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{8}{5 + 2\cos\theta} d\theta$ integralini rezidü yardımıyla hesaplayınız.

3. Aşağıdaki integralleri rezidü yardımıyla hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{8}{13 + 5\sin\theta} d\theta$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 + 4\sin\theta} d\theta$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3 + \sin\theta} d\theta$