## 12 P.V $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ BİÇİMİNDEKİ İNTEGRALLERİN REZİDÜ İLE HESABI

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ rasyonel fonksiyon olarak verilsin.

**Tanım1.** $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx := \lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$ ve $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx := \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{b}^{0} f(x)dx$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx \lim_{b\to\infty} \int\limits_{b}^{0} f(x)dx$$

yazılır.

$$P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$$

olup $\lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$ ise $f$ fonksiyonu Cauchy esas değer anlamında integrallenabilirdir denir. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integrali yakınsak ise $P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integrali de yakınsaktır, tersine $P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integrali yakınsak iken $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integrali yakınsak olmayabilir. Örneğin, $f(x) = x$ veya $f(x) = \sin x$ fonksiyonları için bu iki değer birbirine eşit değildir.

**Uyarı.** Çift fonksiyonlar için Cauchy esas değer ile normal değer aynı anda mevcuttur ve değerleri eşittir. Ama tek fonksiyon için Cauchy esas değeri varken normal değer olmayabilir.

$P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integrali hesaplanırken $x$ yerine $z$ yazılıp düzleme geçilir. Oluşan yeni $f$ fonksiyonunun bazı koşulları sağlması sonucu $P.V$ integrali rezidü yardımıyla hesaplanır.

**Soru1.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+1}$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

olup, $g(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ olmak üzere $\mp i$ noktaları $g$ fonksiyonunun singüler noktalarıdır. Bu singüler noktalardan $z_1 = i$ singüler noktası üst yarı düzlemdedir. Yarıçapı $R > 1$ olmak üzere orijin merkezli, $z_1 = i$ singüler noktasını içeren çemberin üst yarısını $\gamma$ eğrisi ile gösterelim. Bu eğrinin üst düzlemde kalan kısmı $C_R$ olmak üzere $\gamma = C_R \cup [-R, R]$ yazılır. $\gamma$ basit kapalı eğri olduğundan ve $g$ fonksiyonu $z_1 = i$ noktası dışında $\gamma$ eğrisi içinde ve üzerinde analitik olduğundan rezidü teoremi gereğince

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{C_R} \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i Res(g, i) \tag{1}$$

yazılır. $C_R$ eğrisi üzerinde

$$\left| \frac{1}{z^2+1} \right| = \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{||z^2|-1|} = \frac{1}{|R^2-1|} = \frac{1}{R^2-1}$$

olup

$$\left| \int_{C_R} \frac{1}{z^2+1} dz \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{1}{z^2+1} \right| dz \leq \int_{C_R} \frac{1}{R^2-1} dz = \frac{1}{R^2-1} \pi R$$

$R \to \infty$ için yukarıdaki eşitsizlik kullanılarak $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} \dfrac{1}{z^2+1} dz = 0$ bulunur.

(1) Eşitliğinden $R \to \infty$ için limit alınırsa $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i Res(g, i)$ bulunur.

$z_1 = i$ noktası $g$ fonksiyonunun basit kutup noktası olup

$$Res(g, i) = \lim_{z\to z_1} (z - z_1)\, g(z) = \lim_{z\to i} (z - i) \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

bulunur.

**Soru2.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}$ olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2 dx}{x^2+1} = P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2 dx}{x^2+1} dx$ olup, $g(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ olmak üzere $\mp i$ ve $\pm 2i$ noktaları $g$ fonksiyonunun singüler noktalarıdır. Bu singüler noktalardan $z_1 = i$ ve $z_2 = 2i$ singüler noktaları üst yarı düzlemdedir. Yarıçapı $R > 2$ olmak üzere orijin merkezli, $z_1$ ve $z_2$ singüler noktalarını içeren çemberin üst yarısını $\gamma$ ile gösterelim. Bu eğrinin üst düzlemde kalan kısmı $C_R$ olmak üzere $\gamma = C_R \cup [-R, R]$ yazılır. $\gamma$ basit kapalı eğri olduğundan ve $g$ fonksiyonu $z_1$ve $z_2$ noktaları dışında $\gamma$ eğrisi içinde ve üzerinde analitik olduğundan rezidü teoremi gereğince

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + \int\limits_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 2\pi i \left[Res(g,i) + Res(g,2i)\right] \tag{2}$$

yazılır. $C_R$ üzerinde,

$$\left| \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right| = \frac{|z|^2}{|z^2+1|\,|z^2+4|} \leq \frac{|z|^2}{||z^2|-1|\,||z^2|-4|} \leq \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{C_R} g(z)\, dz \right| &\leq \int\limits_{C_R} \left| \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right| dz \leq \int\limits_{C_R} \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-4)} dz \\ &= \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-4)} \pi R \end{aligned}$$

elde edilir, $R \to \infty$ için $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} g(z)\, dz = 0$ bulunur. Dolayısıyla (2) eşitliğinden $R \to \infty$ için $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi i \left[Res(g,i) + Res(g,2i)\right]$ yazılır. $\lim\limits_{z\to z_1} (z-i)\, g(z) = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \dfrac{-1}{6i}$ olup bu limit değeri mevcut ve sıfırdan farklı olduğundan $z_1 = i$ singüler noktası $g$ fonksiyonunun basit kutup noktası olup $Res(g,i)$ değeri bu limit değeri olan $\dfrac{-1}{6i}$ değerine eşittir. Benzer şekilde $\lim\limits_{z\to z_2} (z-2i)\, g(z) = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} = \dfrac{1}{3i}$ olup, bu limit mevcut ve sıfırdan farklı olduğundan $z_1 = 2i$ singüler noktası da $g$ fonksiyonunun basit kutup noktasıdır ve $Res(g,i) = \dfrac{1}{3i}$ yazılır. Bu rezidü değerleri kullanılarak $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = 2\pi i \left[\dfrac{-1}{6i} + \dfrac{1}{3i}\right]$ elde edilir. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$

fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

olup $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{\pi}{6}$ elde edilir.

**Uyarı1.** *P.V* $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ şeklindeki integraller aşağıdaki teorem kullanılarak da hesaplanabilir. Aslında yukarıdaki çözüm yönteminde de bu teoremin şartları elde edilerek çözüme ulaşılıyor.

**Teorem 12.1.** $f$ fonksiyonu $\operatorname{Im} z > 0$ yarı düzleminde sonlu sayıda $z_1$, $z_2$, $z_3, \cdots, z_n$ kutup noktalarına sahip olmak üzere, bu noktaların dışında üst yarı düzlemde analitik ve reel eksende sürekli olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{C_r} f(z)dz = 0$$

ise

$$P.V.\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = 2\pi i\sum_{j=1}^n \underset{z=z_j}{Res} f(z); \qquad \operatorname{Im} z_j > 0$$

sağlanır.

**Uyarı2.** $f$ rasyonel olmak üzere $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ olsun. Eğer $m-n \geq 2$ ve $\forall x \in (-\infty,\infty)$ için $Q_m(x) \neq 0$ ise yukarıdaki teoremin koşulları sağlanır.

**Soru3.** *P.V.* $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+3x+3}dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm.** $P(x) = 1$, $Q(x) = x^2+3x+3$ olmak üzere $P$ ile$Q$ polinomları arasındaki derece farkı ikidir. $x^2+3x+3 = 0$ için $x_{1,2} = \frac{-3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan $\forall x \in (-\infty,\infty)$ için $Q(x) \neq 0$ yazılır. Dolayısıyla Teorem12.1 şartları sağlanır. $x_1$, $x_2$ köklerinden $\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ üst yarı düzlemde olup

$$P.V.\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+3x+3}dx = 2\pi i\underset{z=z_1}{Res} f(z)$$

yazılır, burada $f(z) = z^2+3z+3$ ve $z_1 = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ olarak alınmıştır.

$$\underset{z=z_1}{Res} f(z) = \left(\frac{1}{2z+3}\right)_{z=z_1} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

olduğundan

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+3x+3} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

olarak elde edilir.

**Alıştırmalar**

**1.** Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

**a.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

**b.** $\displaystyle P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

**c.** $\displaystyle P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4x+5)(x^2+4)} dx$

**d.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} dx$

**2.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = \frac{\pi}{6}$ olduğunu gösteriniz.

**3.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$ olduğunu gösteriniz.