13 P.V $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx$ BİÇİMİNDEKİ İNTEGRALLERİN REZİDÜLER YARDIMIYLA HESABI

Soru1. $P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+25}e^{2ix}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2-6z+25}$ olmak üzere $z_1 = 3+4i$ ve $z_2 = 3-4i$ f fonksiyonunun singüler noktalarıdır. Bunlardan z_1 üst yarı düzlemdedir. Yarıçapı $R > 5$ olmak üzere orijin merkezli, z_1 singüler noktasını içeren çemberin üst yarısını γ ile gösterelim. Bu eğrinin üst düzlemde kalan kısmı C_R olmak üzere $\gamma = C_R \cup [-R, R]$ yazılır. γ basit kapalı eğri olduğundan ve f fonksiyonu z_1 noktası dışında γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik olduğundan rezidü teoremi gereğince

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i Res(f, z_1) \tag{3}$$

yazılır. C_R üzerinde $|f(z)| = \left|\frac{e^{2iz}}{z^2-6z+25}\right| \leq \frac{e^{-2y}}{\left||z|^2+6|z|\right|-25} \leq \frac{1}{R^2-6R-25}$ olduğundan

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{R^2-6R-25}\pi R$$

elde edilir, $R \to \infty$ için $\frac{1}{R^2-6R-25}\pi R \to 0$ olacağından $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 0$ bulunur. Dolayısıyla (3) eşitliğinden $R \to \infty$ için limit alınırsa

$$P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2-6x+25} = 2\pi i Res(f, z_1)$$

yazılır. $\lim\limits_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \lim\limits_{z\to 3+4i}\frac{e^{2iz}}{(z-(3-4i))} = \frac{1}{8i}e^{6i-8}$ bulunur. Bulunan bu limit değeri mevcut ve sıfırdan farklı olduğundan $z_1 = 3+4i$ singüler noktası f fonksiyonunun basit kutup noktası olup $Res(f, 3+4i)$ değeri bu limit değerine eşittir. Dolayısıyla $P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2-6x+25} = 2\pi i Res(f, z_1) = \frac{\pi}{4}e^{6i-8}$ olarak elde edilir.

İkinci yol olarak bu tür sorular aşağıda vereceğimiz teorem ile de çözülebilir.

Lemma. (Jordan Lemması)

$\alpha > 0$ olmak üzere

1) g fonksiyonu $D_R := \{z : |z| \geq R > 0,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ bölgesinde sürekli

2) $C_R := \{z : |z| = R > 0,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ve $M(R) := \max\limits_{z \in C_R} |g(z)|$ olmak üzere $\lim\limits_{R \to \infty} M(R) = 0$ ise, bu durumda

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0$$

sağlanır.

Teorem13.1. f rasyonel fonksiyon $\alpha > 0$ olmak üzere Jordan Lemmasının tüm koşulları gerçeklensin. Bu durumda

i) $$P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \underset{\substack{z = z_j, \\ \operatorname{Im} z_j > 0}}{Res} \left\{ f(z) e^{i\alpha z} \right\}$$

ii) $$P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x)\, dx = -2\pi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \underset{\substack{z = z_j, \\ \operatorname{Im} z_j > 0}}{Res} \left[f(z) e^{i\alpha z} \right] \right\}$$

iii) $$P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x)\, dx = 2\pi \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \underset{\substack{z = z_j, \\ \operatorname{Im} z_j > 0}}{Res} \left[f(z) e^{i\alpha z} \right] \right\}$$

gerçeklenir.

Soru2. İlk soruyu yukarıda verilen teoremi kullanarak çözünüz.

Çözüm. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 25}$ olup, f rasyonel fonksiyondur. $\alpha = 2$ olduğundan $\alpha > 0$ sağlanır. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 6z + 25} = 0$ için $z_{1,2} = 3 \pm 4i$ olup bunlardan $z_1 = 3 + 4i$ üst yarı düzlemdedir. f fonksiyonu $R > 5$ olmak üzere $D_R := \{z : |z| \geq R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ bölgesinde sürekli ve $C_R := \{z : |z| = R > 0,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ için $M(R) := \max\limits_{z \in C_R} \left| \dfrac{1}{z^2 - 6z + 25} \right| \leq \dfrac{1}{R^2 + 6R - 25} \to 0 \quad (R \to \infty)$ olduğundan Jordan Lemması şartları sağlanır. Theorem13.1 gereğince

$$\begin{aligned} P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 - 6x + 25} &= 2\pi i \underset{z = z_1}{Res} \left(\frac{e^{2iz}}{z^2 - 6z + 25} \right) = 2\pi i \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{e^{2iz}}{z^2 - 6z + 25} \\ &= 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{e^{2iz}}{z - (3 - 4i)} = \frac{\pi}{4e^8} e^{6i} \end{aligned}$$

bulunur.

Soru3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $g(x) = \frac{\cos 3x}{x^2+1}$ fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx = P.V \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx$$

sağlanır. İlk yol olarak Teorem12.1 kullanılabilir. İkinci yol olarak aşağıda verilen çözüm yolu izlenir.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\left(e^{i3x}\right)}{x^2+1} dx = \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(e^{i3x}\right)}{x^2+1} dx$$

$f(z) = \frac{e^{i3z}}{z^2+1}$ denilirse $z^2+1=0$ için $z=\pm i$, f fonksiyonunun singüler noktalarıdır. Bunlardan $z=i$ üst yarı düzlemdedir. Yarıçapı $R>1$ olmak üzere orijin merkezli, $z=i$ singüler noktasını içeren çemberin üst yarısını γ ile gösterelim. Bu eğrinin üst düzlemde kalan kısmı C_R olmak üzere $\gamma = C_R \cup [-R,R]$ yazılır. γ basit kapalı eğri olduğundan ve f fonksiyonu $z=i$ noktası dışında γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik olduğundan rezidü teoremi gereğince

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i Res(f,i) \tag{4}$$

yazılır. C_R üzerinde $z = x+iy$ olmak üzere

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{i3z}}{z^2+1}\right| \leq \frac{e^{-ay}}{|z|^2-1} \leq \frac{1}{R^2-1}$$

olup

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)dz\right| \leq \frac{1}{R^2-1}\pi R \to 0, \quad (R\to\infty)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4) eşitliğinden $R\to\infty$ için limit alınırsa

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i Res(f,i)$$

yazılır. $\lim\limits_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{e^{-3}}{2i}$ olup bu limit değeri mevcut ve sıfırdan farklı olduğundan $z=i$ singüler noktası f fonksiyonunun basit kutup noktasıdır. Bu

durumda fonksiyonun i noktadaki rezidüsü bu limit değerine eşittir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2+1}dx = 2\pi i Res(f,i) = 2\pi i \frac{e^{-3}}{2i} = \frac{\pi}{e^3}$$

olacağından

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1}dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(e^{i3x}\right)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{e^3}$$

elde edilir.

Soru4. $P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+9)(x^2+1)^2}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \sin z}{(z^2+9)(z^2+1)^2}dz &= P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \operatorname{Im} e^{iz}}{(z^2+9)(z^2+1)^2}dz \\ &= P.V \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{(z^2+9)(z^2+1)^2}dz \end{aligned}$$

olup $z_{1,2} = \pm i$ ve $z_{3,4} = \pm 3i$ $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+9)(z^2+1)^2}$ fonksiyonunun singüler noktaları olup bunlardan $z_1 = i$ ve $z = 3i$ üst yarı düzlemdedir. Yarıçapı $R > 3$ olmak üzere orijin merkezli, $z_1 = i$ ve $z = 3i$ singüler noktalarını içeren çemberin üst yarısını γ ile gösterelim. Bu eğrinin üst düzlemde kalan kısmı C_R olmak üzere $\gamma = C_R \cup [-R, R]$ yazılır. γ basit kapalı eğri olduğundan ve f fonksiyonu z_1, z_2 noktaları dışında γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik olduğundan rezidü teoremi gereğince

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \left[Res(f,i) + Res(f,3i)\right] \tag{5}$$

yazılır. C_R üzerinde $z = x + iy$ olmak üzere

$$|f(z)| \leq \frac{|z| e^{-y}}{\left||z|^2 - 1\right|^2 \left||z|^2 - 9\right|} \leq \frac{R}{|R^2-1|^2 |R^2-9|} < \frac{R}{(R^2-1)^2 (R^2-9)}$$

olup

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \frac{R}{(R^2-1)^2 (R^2-9)} \pi R \to 0, \quad (R \to \infty)$$

bulunur. (5) eşitliğinden $R \to \infty$ için limit alınırsa

$$P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+9)(x^2+1)^2} dx = 2\pi i \left[Res(f,i) + Res(f,3i) \right]$$

olur. $\lim_{z \to i} (z-i)^2 f(z) = \dfrac{-i}{32e}$ olduğundan $z_1 = i$, f fonksiyuonunun 2. mertebeden kutup noktasıdır.

$$Res(f,i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left(\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)(z^2+1)^2} \right) = \frac{3}{128e}$$

bulunur. $\lim_{z \to i} (z-3i) f(z) = \lim_{z \to i} \dfrac{ze^{iz}}{(z+3i)(z^2+1)^2} = \dfrac{e^{-3}}{128}$ olduğundan $z_2 = 3i$, f fonksiyuonunun basit kutup noktasıdır, ve $Res(f,3i) = \dfrac{e^{-3}}{128}$ yazılır. Dolayısıyla $P.V \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+9)(x^2+1)^2} dx = 2\pi i \left(\frac{3}{128e} + \frac{e^{-3}}{128} \right) = \left[\frac{\pi i \left(1+3e^2\right)}{64e^3} \right]$ olarak elde edilir. Buradan $P.V \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+9)(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi \left(1+3e^2\right)}{64e^3}$ bulunur.

Alıştırmalar

1. $P.V \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5} dx$ integralini hesaplayınız.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2} dx$ integralini hesaplayınız.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2} dx$ integralini hesaplayınız.