14 ARGUMAN İLKESİ VE ROUCHE TEOREMİ

Teorem14.1. f fonksiyonu basit kapalı γ çevresinin içinde ve üzerinde analitik olmak üzere bu çevre içinde sonlu sayıda $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sıfırlarına sahip olsun. Ayrıca $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bu sıfırların katı ise,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f^{'}(z)}{f(z)} dz = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

gerçeklenir.

Tanım1. $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$ sayısına f fonksiyonunun sıfırlarının sayısı denir.

Tanım2. (Argüment Değişimi)

γ kapalı bir eğri olsun. z_0, γ üzerinde bulunmayan herhangibir nokta olsun. Eğer z, γ eğrisini tararsa $(z - z_0)$ sayısının argümentinde olan değişme $\Delta_\gamma \arg(z - z_0)$ ile gösterilir ve bu değişime argüment değişimi denir.

Teorem14.2. f fonksiyonu bir B bölgesinde analitik bir fonksiyon, γ ise B de bulunan ve f fonksiyonunun hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı eğri olsun. f fonksiyonunun γ içindeki sıfır yerlerinin sayısı N, kutup yerlerinin sayısı P ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f^{'}(z)}{f(z)} dz = N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z)$$

sağlanır.

Teorem14.3. (Rouche Teoremi)

f ve g fonksiyonları basit kapalı C çevresinin üzerinde ve içinde analitik ve C üzerinde $|f(z)| > |g(z)|$ olsun. Bu durumda f ve $f+g$ fonksiyonları C içinde aynı sayıda sıfıra sahiptirler.

Soru1. $z^5 - 15z + 1 = 0$ denkleminin $|z| = 2$ çemberi içindeki köklerinin sayısını bulunuz.

Çözüm. $f(z) = z^5$, $g(z) = -15z + 1$ olmak üzere $C : |z| = 2$ üzerinde, $|f(z)| = |z|^5 = 2^5 = 32$ ve $|g(z)| = |-15z + 1| \leq 15|z| + 1 = 31$ olduğundan $|f(z)| > |g(z)|$ sağlanır. C basit, kapalı çevre f ve g fonksiyonları C içinde ve üzerinde analitik olduğundan Rouche Teoremi gereğince f ile $f+g$ fonksiyonları C içinde aynı sayıda sıfıra sahiptir. f fonksiyonunun C içinde beş tane sıfırı bulunduğundan $f+g$ fonksiyonu da C içinde beş sıfıra sahiptir.

Soru2. $z^5 - 15z + 1 = 0$ denkleminin $|z| = 1$ çemberi içindeki köklerinin sayısını bulunuz.

Çözüm $f(z) = -15z$, $g(z) = z^5 + 1$ olmak üzere $C : |z| = 1$ üzerinde, $|f(z)| = 15|z| = 15$ ve $|g(z)| = \left|z^5 + 1\right| \leq |z|^5 + 1 = 2$ olduğundan C üzerindeki her z için $|f(z)| > |g(z)|$ sağlanır. C basit, kapalı çevre f ve g fonksiyonları C içinde ve üzerinde analitik olduğundan Rouche Teoremi gereğince f ile $f+g$ fonksiyonları C içinde aynı sayıda sıfıra sahiptir. f fonksiyonunun C içinde bir tane sıfırı bulunduğundan $f+g$ fonksiyonu da C içinde bir sıfıra sahiptir. Bu sıfırda $z = 0$ noktasıdır.

Sonuç1. Soru1 ve Soru2 kullanılarak $z^5 - 15z + 1 = 0$ denkleminin $1 < |z| < 2$ bölgesinde $5 - 1 = 4$ tane kökü vardır.

Soru3. $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ denkleminin $|z| < 1$ içinde kaç tane kökü olduğunu bulunuz.

Çözüm. $f(z) = -4z^5 - 1$, $g(z) = z^8 + z^2$ olmak üzere $C : |z| = 1$ üzerinde ve içinde f, g fonksiyonları analitiktir. $C : |z| = 1$ üzerinde,

$$|f(z)| = \left|-4z^5 - 1\right| \geq \left|4|z|^5 - 1\right| = 3$$

ve $|g(z)| = \left|z^8 + z^2\right| \leq |z|^8 + |z|^2 = 2$ olup $\forall z \in |z| = 1$ için $|f(z)| > |g(z)|$ sağlanır. Ayrıca C basit kapalı bir çevredir. Rouche teoreminden f ile $f + g$ fonksiyonları C içinde aynı sayıda sıfıra sahiptir.

$$-4z^5 - 1 = 0 \Rightarrow z^5 = \frac{-1}{4}$$

olup

$$|z|^5 = \frac{1}{4} \Rightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt[5]{4}} < 1$$

olduğundan f fonksiyonunun bütün sıfırları C çevresinin içindedir..f fonksiyonunun C içinde beş tane sıfırı bulunduğundan $f + g$ fonksiyonu da C içinde beş sıfırı vardır.

Soru4. $f(z) = (z + 2)(z + 3)$ olsun. $|c| < 2$ olmak üzere birim çemberin içinde $f(z) \neq c$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Birim çemberin üzerinde

$$|f(z)| = |z + 2| |z + 3| \geq ||z| - 2| ||z| - 3| = 2$$

sağlanır. $g(z) = -c$ olsun. $|g(z)| < |c| < 2$ olduğundan birim çember üzerindeki her z değeri için $|f(z)| > |g(z)|$ yazılır. f ve g fonksiyonları birim çember içinde ve üzerinde analitik ve birim çember basit, kapalı eğri olduğundan Rouche Teoremi gereğince f ile $f + g$ fonksiyonlarının birim çember içindeki sıfırlarının sayısı aynıdır. f fonksiyonunun bu bölgede hiç sıfırı olmadığından

$$f(z) + g(z) = (z + 2)(z + 3) - c = 0$$

denkleminin de birim çemberin içinde hiç kökü yoktur. Diğer bir ifadeyle birim çemberin içinde

$$f(z) = (z + 2)(z + 3) \neq c$$

sağlanır.

Soru5. $f(z) = \dfrac{z^2 + 3z - 4}{(z - 3)^3}$, $\alpha(t) = 5e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ olsun. $\displaystyle\int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. f fonksiyonu Teorem14.2 şartlarını sağlar, bu teorem kullanılarak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

yazılır. f fonksiyonunun α içinde 2 tane sıfır yeri 3 tane kutup yeri olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2-3=-1$$

olup

$$\int\limits_{\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = -2\pi i$$

bulunur.

Soru6. $I = \int\limits_{|z|=4}\frac{3z^2+2z-5}{z^3+z^2-5z+3}dz$ integralini Teorem13.2 kullanarak hesaplayınız.

Çözüm. $f(z) = z^3+z^2-5z+3$ olarak alınırsa $\frac{d}{dz}f(z) = z^2+2z-5$ yazılır. $C : |z| = 4$ çevresi sözkonusu teoremin şartlarını sağlar. $f(z) = 0$ denkleminin kökleri $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, $z_3 = -3$ olduğundan teoremde geçen $N = 3$ bulunur. $f(z) = 0$ denkleminin kutubu olmadığından teoremde geçen $P = 0$ olup

$$I = \int\limits_{|z|=4}\frac{3z^2+2z-5}{z^3+z^2-5z+3}dz = 2\pi i\,(N-P) = 6\pi i$$

elde edilir.

Alıştırmalar

1. $2z^7+11z^2-1=0$ denkleminin

a) $|z|<1$ bölgesindeki köklerinin sayısını bulunuz.

b) $|z|>1$ bölgesindeki köklerinin sayısını bulunuz.

2. $z^4-12z+10=0$ denkleminin $D=\{z : 1<|z|<3\}$ bölgesindeki köklerinin sayısını bulunuz.

3. $f(z) = z^7-5z^3+12$ fonksiyonunun tüm sıfırlarının $1<|z|<2$ bölgesinde bulunduğunu gösteriniz.

4. $z+3+2e^z=0$ denkleminin, sol yarı düzlemde bir tek kökünün olduğunu gösteriniz.

5. $|c|<\frac{1}{4}$ ve $f(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)$ olmak üzere f fonksiyonunun açık birim yuvarda, c değerini iki defa aldığını gösteriniz.

6. $f(z) = 6z^4+z^3-2z^2+z-1$ ve C çevresi $|z|=1$ birim çemberi olmak üzere $\int\limits_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ integralini hesaplayınız.