

4.4 Sayısal Evrişim

Aynı örnekleme aralığı ile örneklenmiş b ve g gibi iki veri kümesinin sayısal evrişimi

$$f(i) = \sum_{j=1}^m b(j)g(i-j+1)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. b ve g dizyelerinin eleman sayıları sırası ile m ve n olmak üzere bu iki yöneyin evrişiminden $k=n+m-1$ adet çıkış elde edilir. Bu da yukarıdaki eşitliğin sağ yanının, i indeksinin her değeri için bir kez yürütülmesi gerektiğini ortaya koyar. Çıkışın ilk yatay eksen değeri $tf_1 = tb_1 + tg_1$ bağıntısı ile hesaplanabilir. Sonraki yatay eksen değerleri bundan örnekleme aralığı (dt) kadar aralıklarla sıralanacaktır. Yukarıdaki işlemi yürüten MATLAB fonksiyonu

```
function evrisim(g,b)
n=length(g);
m=length(b);
k=n+m-1;
tic
for i=1:k
    top=0;
    for j=1:m
        nn=i-j+1;
        if nn>1&&nn<n
            top=top+b(j)*g(nn);
        end
    end
    C(i)=top;
end
```

şeklinde yazılabilir. Evrişim işlemi için yazılan fonksiyon ile aynı işlevi yerine getiren MATLAB kütüphane fonksiyonu **conv** da kullanılabilir. Fonksiyonun kullanımı

```
f=conv(b,g);
```

şeklinde dir. Evrişimde fonksiyonların sırasının değişmesinin sonucu değiştirmeyeceği hatırlanmalıdır. Evrişim birçok sayısal yöntem içerisinde kullanılan bir işlemdir. Bunlardan biri de doğrusal süzgeçlerdir. Belirli frekansların veriden uzaklaştırılması, giriş verisinin türevinin ya da integralinin alınması gibi işlemler bu amaçlar için tasarlanmış süzgeç katsayıları ile bir giriş fonksiyonun evrişimi ile gerçekleştirilebilir. Süzgeçlerin kurulması, katsayılarının hesaplanması ve kullanımı ile ilgili geniş bilgi için Başokur (2007)'ye bakılabilir.

Aşağıda doğrusal bir süzgecin tasarlanarak bir giriş verisi ile evriştirilmesi ve bunun sonucunda yüksek frekansların veriden uzaklaştırılması ile ilgili bir örnek verilmiştir. Alçak geçişli bir süzgeç veriden belirli

bir frekansın üstündeki bileşenlerin uzaklaştırılmasını sağlar. f_L gibi bir kesme frekansının altını geçiren ve bundan büyük tüm frekanslardaki olayları veriden uzaklaştırarak doğrusal süzgecin katsayıları

$$b_i = \frac{\sin(2\pi f_L t_i)}{2\pi f_N t_i}, \quad i = 1, N$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. Burada f_N Nyquist frekansı, t_i katsayıların hesaplandığı ayrıntı yatay eksen değerleri, N ise katsayıların sayısıdır. Süzgeç katsayılarının giriş verisi ile aynı örnekleme aralığı için hesaplanması gereklidir. Süzgeç katsayıları ile giriş verisinin sayısal evrişimi sonucunda süzgeçleme gerçekleşmiş olur. Bu işlem sembolik olarak

$$f_F = f * b$$

şeklinde gösterilebilir. Aşağıdaki ifade ile tanımlanan 1Hz, 5Hz ve 15Hz frekanslarında titreşen sinüzoidlerin toplamından oluşan

$$f(t) = \sin(2\pi t) + 0.5 \cos(10\pi t) - \sin(30\pi t)$$

fonksiyonu $dx=0.01$ örnekleme aralığı ile örneklenecek sına verisi olarak kullanılacaktır. Bu veriden 7Hz ve daha yüksek frekanslardaki olayların uzaklaştırılması için bu amaçla hesaplanmış süzgeç katsayıları ile evriştirilmesi yeterli olacaktır. Süzgeç katsayılarının hesaplanmasında kullanılan bağıntıda f_L yerine 7, f_N yerine de 50 yazılabilir. Aşağıda verilen MATLAB programı sına verisinin oluşturulması, süzgeç katsayılarının hesaplanması ve giriş verisi ile süzgeç katsayılarının evriştirilmesi ile zaman bölgesinde süzgeçleme işlemini gerçekleştirmektedir. Verinin frekans içeriğindeki değişimi göstermek için Fourier dönüşümü de alınmış ve süzgeçlemeden önce ve sonraki durumlar ortaya konulmuştur.

```
function evrisim
% Zamanda sına verisi üretilip frekans bölgesi karşılığı ile çiziliyor
dt = 0.001; % Örnekleme Aralığı zaman
t=0:dt:5;
%Nyquist frekansı
fn=1/2/dt;
L = length(t); % Sinyal Boyu
ft=sin(2*pi*t)+0.5*cos(10*pi*t)-sin(30*pi*t); % Sına verisi üretildi
% Zaman fonksiyonunu çiziliyor
subplot(221)
zamanda_ciz(t,ft)
title('Zaman serisi')

subplot(222)
fft_hesapla_ciz(t,ft,L,fn)
% Süzgeç katsayıları hesaplanıyor
fL=7;
ts=-.3:dt:.3;
for k=1:length(ts)
    if ts(k)~=0
```

```

        b(k)=sin(2*pi*fL*ts(k))./2/pi/fn./ts(k);
    else
        % Paydanın sıfır olması durumunda
        b(k)=fL/fn;
    end
end
%Süzgeç katsayıları ile zaman fonksiyonu evriştiriliyor
fF=conv(ft,b);

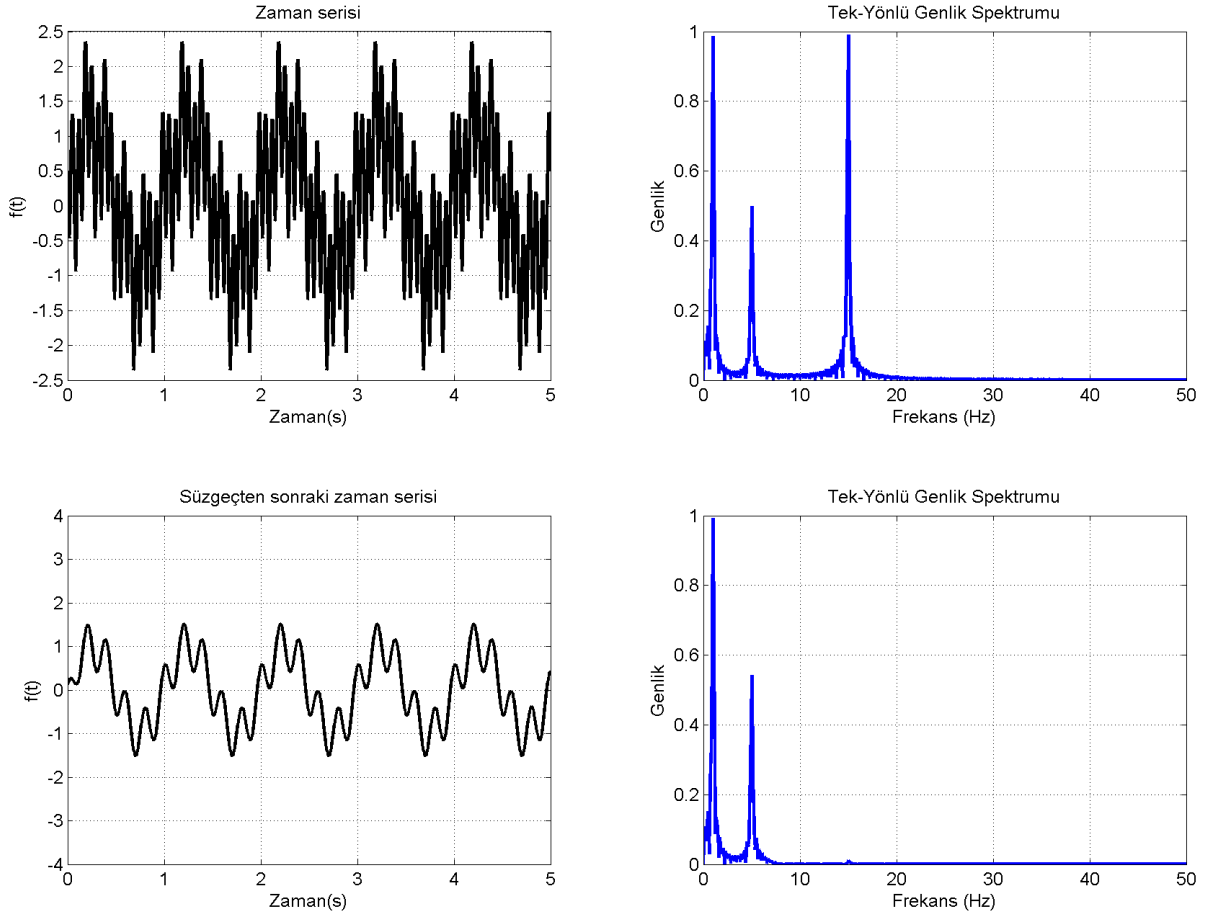
% Çıkış sayısı
k=L+length(ts)-1;

% Çıkışın yatay eksen değerleri
tF(1)=ts(1)+t(1);
for m=2:k
    tF(m)=tF(m-1)+dt;
end
%Sonuçlar çiziliyor
subplot(223)
zamanda_ciz(tF,fF)
axis([0 5 -4 4]);
title('Süzgeçten sonraki zaman serisi')

subplot(224)
fft_hesapla_ciz(tF,fF,L,fn)

function fft_hesapla_ciz(tF,fF,L,fn)
NFFT = 2^nextpow2(length(tF)); % 2 nin sonraki tam kuvveti
Y = fft(fF,NFFT)/L;
ft = fn*linspace(0,1,NFFT/2+1);
% Tek taraflı gösterime göre çiz
plot(ft,2*abs(Y(1:NFFT/2+1)))
grid
axis([0 50 0 1]);title('Tek-Yönlü Genlik Spektrumu')
xlabel('Frekans (Hz)');ylabel('Genlik')
l=findall(gcf,'Type','line');
set(l,'LineWidth',2,'color','k')
function zamanda_ciz(t,ft)
plot(t,ft)
grid on
xlabel('Zaman(s)'); ylabel('f(t)');

```



Şekil 4. 1 Zaman serisinin süzgeç katsayıları ile evrişimi ile süzgeçleme

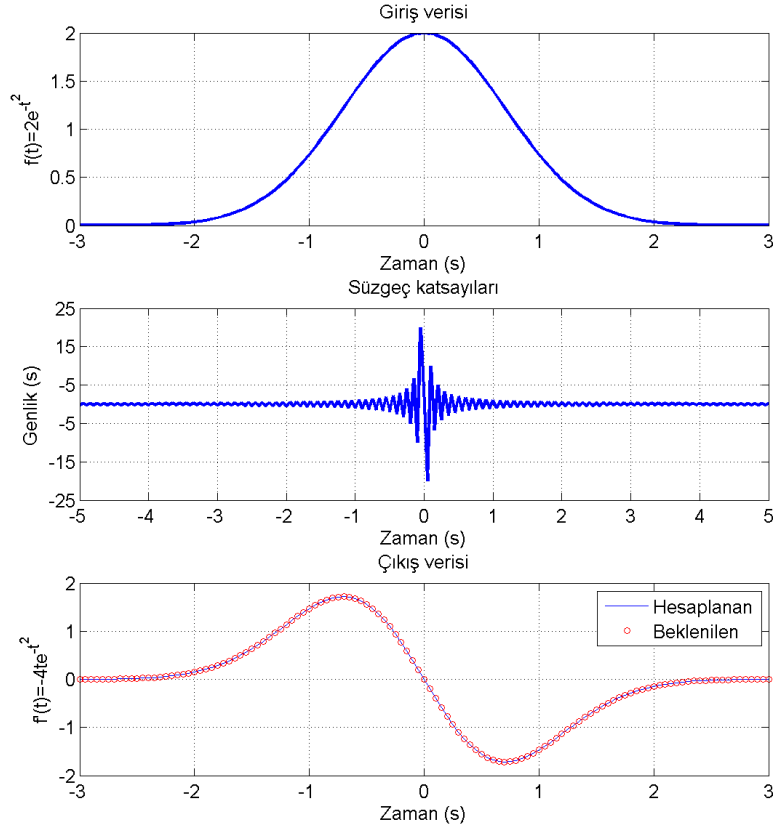
Alıştırmalar

1. Sayısal bir verinin birinci türevi doğrusal süzgeç kuramından yararlanarak $f' = f * b$ evrişimi ile hesaplanabilir. Burada b birinci türev süzgecinin katsayıları, f giriş verisi f ise giriş verisinin birinci türevidir. Birinci türev süzgecinin katsayıları

$$b_i = \frac{\cos(2\pi f_N t_i)}{t_i} - \frac{\sin(2\pi f_N t_i)}{2\pi f_N t_i^2}$$

bağıntısı ile hesaplanabilir (Başokur, 2007). Burada f_N Nyquist frekansıdır. Sayısal evrişimin başarılı sonuç vermesi için verilerin zaman sınırlı olması gerektiği hatırlanmalıdır. Zaman sınırlılık $-t$ ve $+t$ yönlerine gidildiğinde fonksiyonun sıfıra yaklaşmasıdır. Diğer bir deyişle bir başlangıç ve bitiş zamanının olması, bu zaman aralığı dışında olayın gerçekleşmiyor olması gerekmektedir. Bu bilgiler ışığında

- Süzgeç katsayılarını $dt=0.05$ örnekleme aralığı için hesaplatınız
- $f(t) = 2e^{-t^2}$ fonksiyonunun sayısal değerlerini aynı örnekleme aralığı için hesaplayınız
- Süzgeç katsayıları ile giriş verisini evriştirerek sayısal türevi hesaplayınız.
- Sonuçları aşağıdaki gibi beklenen (analitik) türev ile birlikte karşılaştırmalı olarak çizdiriniz.



- Bölüm 4.3 sonunda yer alan Alıştırma 1'de verilen deprem ivme kaydından 5Hz ve daha yüksek frekanslı olayları uzaklaştırdınız. Süzgeçleme öncesi ve sonrasını zaman ve frekans ortamında çizdiriniz.