4.5.2 Sayısal İntegral

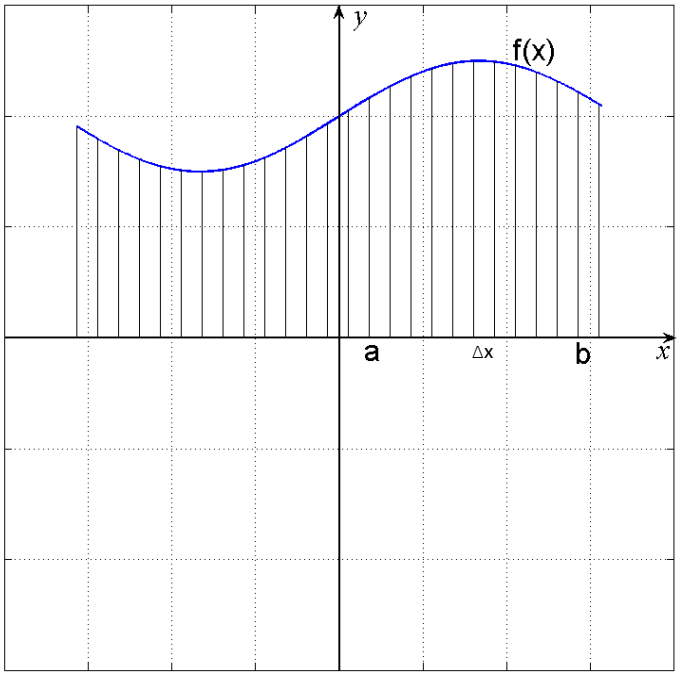
Sayısal integral bağımsız bir değişkene bağlı sayısal değerlerin tanımladığı eğri ile yatay eksen (y=0) arasında kalan alanın toplamına eşittir. Farklı veriler için konuşulduğunda integralin fiziksel anlamı da değişebilir. Örneğin hareketli bir cismin zamana göre hızının integrali cismin toplam yer değiştirmesini verecektir. Sayısal integral ile hesaplanmak istenen

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

ifadesidir. Bu hesaplama için çeşitli yöntemler önerilmiştir. Yamuk kuralı (trapez), Simpson yöntemi, Gauss integrasyonu, Romberg integrasyonu gibi yöntemler bunlara örnek verilebilir. Bunlardan en sık kullanılanlardan biri yamuk kuralıdır. Buna göre eğri ile x ekseni arasında kalan alan küçük yamuklara ayrılarak hesaplanır (Şekil 4.27). Bir yamuğun alanı

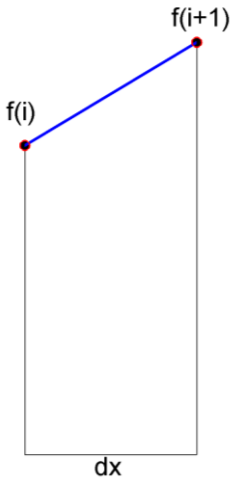
$$A = \frac{(h_1 + h_2)}{2} dx$$

bağıntısı ile verilir. Burada h_1 ve h_2 yamuğun birbirine paralel kenarlarının uzunlukları, dx ise yüksekliğidir. Şekil 4.27'da eğri ile x ekseni arasında kalan alanın, dx adımlarla ayrıklaştırılması ile oluşan yamuklar görülebilmektedir. Buradaki varsayım seçilen dx aralığında veri ya da fonksiyon değerlerindeki değişimin doğrusal olduğudur.



Şekil 4.1 Yamuk kuralı ile integral alma

(i) fonksiyonun ayrık değerlerinin veya sayısal verilerin sıra numarasını göstermek üzere i ve i+1 numaralı veriler arasında oluşan yamuk aşağıdaki gibidir. Bu yamuğun birbirine paralel olan kenarlarının uzunlukları sırası ile f(i) ve f(i+1)'dir. Yamuğun yüksekliği ise dx kadardır (Şekil 4.28)



Şekil 4. 2 Yamuk kuralında alanın yamuklara bölünmesi

Verilen yamuğun alanı

$$A_i = \frac{f(i)+f(i+1)}{2}dx$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. Eğri altında kalan tüm yamukların alanlarını ise

$$I \cong \frac{f(1)+f(2)}{2}dx + \frac{f(2)+f(3)}{2}dx + \ldots + \frac{f(\mathrm{n}-2)+f(\mathrm{n}-1)}{2}dx + \frac{f(\mathrm{n}-1)+f(\mathrm{n})}{2}dx$$

toplamı ile verilebilir. Burada toplamı oluşturan terimler incelendiğinde f(1) ve f(n) dışındaki tüm ayrık değerlerin iki kez tekrarlandığı görülebilir. Buna göre düzenleme yapıldığında

$$I \cong \frac{dx}{2}\left[f(1)+f(n)+2\sum_{i=2}^{n-1} f_i \right]$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki ifade ayrık noktalarda tanımlı f fonksiyonunun integralini yamuk kuralı ile vermektedir. Buradaki yaklaşık eşit ifadesi fonksiyonun tüm x(i), x(i+1) aralıklarında doğrusal davranması durumunda eşittir ifadesine dönüşecektir. Yamuk kuralı ile sayısal integral hesaplanması için verilen ifade aşağıda bir örnek için işletilmiştir.

```
% Sınama verisi üretiliyor
dx = .01;
x  = -pi/2:dx:pi/2;
f  = cos(x);
% Sayısal integral (yamuk kuralı ile)
I = (dx/2)*(f(1)+f(end)+2*sum(f(2:end-1)))
% Analitik değer
A = sin(pi/2)-(sin(-pi/2))
```

```
I =

    2.0000


A =

     2.0000
```

Görüleceği üzere sayısal integral ile beklenilen değerler uyumludur. Burada verilen hesaplamayı yürüten MATLAB kütüphanesinde **trapz** isimli bir fonksiyon bulunmaktadır. Fonksiyonun genel kullanımı

```
I = trapz(x,y)
```

şeklindedir. Burada x, yatay eksen değerleri, y ise bu yatay eksen değerlerindeki sayısal verilerdir. Yukarıda kullanılan sınama verisi için

```
IT=trapz(x,f)
IT=
        2.0000
```

şeklinde çağırılarak kullanılabilir. Sayısal veriler yerine bir fonksiyonun belirli bir aralıktaki integrali hesaplanmak isteniyorsa Simpson yöntemini kullanan MATLAB fonksiyonu **quad** kullanılabilir.

```
f = @(x) exp(-x)
q = quad(f,0,3)
q =
   0.9502
```

program parçası $f(x)=e^{-x}$ fonksiyonunun [0 3] aralığındaki integralini hesaplamaktadır. Burada anlatılanlar dışında sayısal türev ve integral işlemlerinde kullanılabilecek çeşitli MATLAB fonksiyonları ve kısa kullanım amaçları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.1 MATLAB kütüphanesinde yer alan çeşitli sayısal türev ve integrasyon fonksiyonları

Fonksiyon adı	Kullanım amacı
`cumtrapz`	Yamukların alanlarını birikimli olarak veren integral alma fonksiyonu
`gradient`	Sayısal gradyen
`del2`	Ayrık Laplacien
`integral`	Sayısal integral
`integral2`	İki katlı integral
`integral3`	Üç katlı integral

Alıştırmalar

1. $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ fonksiyonunun sayısal türevini [0 3] aralığında dx=0.01 adım boyu için hesaplayınız. Fonksiyonun analitik türevi $f^{'}(x) = \mathrm{e}^{-x}$ bağıntısı ile hesaplanabilir. Buna göre analitik türev ile sayısal türev arasındaki hatayı

$$\chi = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(h_i - a_i)^2}$$

bağıntısı ile hesaplayınız. Burada n veri sayısını, h hesaplanan türev değerlerini, a ise analitik türev değerlerini göstermektedir. Aynı hata hesaplamasını dx'in 0.5, 0.1, 0.05 0.01 değerleri için de yaparak dx ile hesaplama hatası arasındaki ilişkiyi çizdiriniz.

2. Düz bir yol üzerinde hareket eden bir cismin zamana karşı ölçülen hız değerleri aşağıdaki gibidir. Cismin toplam yer değiştirmesini sayısal integrasyon ile bulan bir MATLAB programı yazınız.

t(s)	0	1	2.2	3.1	4.2	5	6.5	7.7	9	10
V (m/s)	0	2.81	6.22	8.81	12.01	14.35	18.80	22.41	26.36	29.44

3. http://goo.gl/2lGFPk adresinden indireceğiniz mat-dosyası içeriğinde bir deprem sırasında zamana karşı ölçülmüş hız değerleri bulunmaktadır (t ve v değişkenlerinde). Hızın zamana göre türevinin hareketin ivmesini verdiği bilgisinden yola çıkarak aynı istasyondaki yer ivme değerlerini hesaplayarak çizdiriniz. Hesaplamalarda deprem kaydının ilk 200 saniyesini kullanınız.

KAYNAKLAR

Akca Öztürk, C. 2011. Antik yerleşim alanlarında uygulanan jeoarkeolojik-yeni arkeojeofizik teknikler: Psidia Antioacheia örneği. Süleyman Demirel Üniversitesi, Doktora tezi

Başokur, A. T. 2007. Spektral Analiz ve Sayısal Süzgeçler, JFMO Eğitim Yayınları No: 8.

Başokur, A. T., Dikmen, Ü. and Tokgöz O. E., 2003. Time-frequency representation of strong-motion records for damage appraisal: examples from the Düzce earthquake (Turkey), Near Surface Geophysics, 1, 95-101. (TÜBİTAK 985-Deprem sonrasi acil araştırma programı).

http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/ MATLAB kullanıcıları paylaşım merkezi, Erişim tarihi: 10.02.2015