

3. Sıcaklık Problemleri

$T(t)$ bir cismin sıcaklığını, T_m de cismi çevreleyen ortamın sıcaklığını gösterebilir. Bu durumda Newton'un soğuma yasasına göre cismin sıcaklığının zamanla değişim hızı

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad (1)$$

veya

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m \quad (2)$$

diferensiyel denklemi ile ifade edilir, burada k pozitif orantı sabitidir. (1) ya da eşdeğer olan (2) diferensiyel denkleminin $T > T_m$ durumunda soğuma problemini, $T < T_m$ durumunda ise ısınma problemini ifade ettiğine dikkat edilmelidir.

Örnek 1.80 $^{\circ}F$ sıcaklıktaki bir cisim $50^{\circ}F$ sabit sıcaklıkta tutulan bir odaya yerleştiriliyor. 5 dakika sonra cismin sıcaklığı $70^{\circ}F$ ye düştüğüne göre

(a) 10 dakika sonra cismin sıcaklığı kaç $^{\circ}F$ olur?

(b) Yaklaşık olarak kaç dakika sonra cismin sıcaklığı $60^{\circ}F$ olur?

Çözüm. $T(t)$ herhangi bir t anında cismin sıcaklığını, T_m de ortamın sıcaklığını göstermek üzere verilen problemin diferensiyel denklemi

$$\frac{dT}{dt} + kT = 50k \quad (3)$$

ve koşullar $T(0) = 80$, $T(5) = 70$ şeklindedir. (3) diferensiyel denklemi değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olup integre edilirse

$$T(t) = 50 + ce^{-kt} \quad (4)$$

genel çözümü bulunur, burada c integral sabitidir. $T(0) = 80$ koşulu uygulanırsa (4) den

$$T(t) = 50 + 30e^{-kt} \quad (5)$$

bulunur. k orantı sabitini belirlemek için $T(5) = 70$ koşulu (5) denkleminde

göz önüne alındığında $e^{-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$ ve buradan

$$T(t) = 50 + 30 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{5}} \quad (6)$$

elde edilir

(a) (6) dan $T(10) = 50 + 30 \left(\frac{2}{3}\right)^2$ olup 10 dakika sonra cismin sıcaklığı yaklaşık olarak $63^\circ F$ olur.

(b) $T(t_1) = 60$ olacak şekildeki t_1 değerini arıyoruz. (6) dan elde edilen

$$60 = 50 + 30 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t_1}{5}}$$

denklem çözüldüğünde

$$t_1 = 5 \frac{\ln \frac{1}{3}}{\ln \frac{2}{3}}$$

elde edilir.

Örnek 2. Bilinmeyen sıcaklıktaki bir cisim $0^\circ F$ sabit sıcaklıktaki bir buzdolabına yerleştiriliyor. 20 dakika sonra cismin sıcaklığı $40^\circ F$ ve 40 dakika sonra $20^\circ F$ ise cismin başlangıçtaki sıcaklığını bulunuz.

Çözüm. $T(t)$ herhangi bir t anında cismin sıcaklığını gösterecek şekilde $T_m = 0$ olduğundan verilen problemin diferensiyel denklemi

$$\frac{dT}{dt} = -kT \quad (7)$$

şeklinde, burada $k > 0$ orantı sabitidir. (7) diferensiyel denklemi integre edilirse

$$T(t) = ce^{-kt} \quad (8)$$

genel çözümü elde edilir. $T(20) = 40$ ve $T(40) = 20$ koşulları (8) de göz önüne alındığında

$$T(t) = 40(2)^{\frac{20-t}{20}}$$

bulunur. O halde $T(0) = 80^\circ F$ dir.