Parametrelerin Değişimi Yöntemi

Bu bölümde

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x) \tag{1}$$

denkleminin bir özel çözümü sabitlerin değişimi veya parametrelerin değişimi yöntemi yardımıyla hesaplanmaktadır; burada $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ katsayıları ve $f(x)$ bir (a,b) da sürekli ve her $x \in (a,b)$ için $a_0(x) \neq 0$ dır. Bu yönteme göre önce karşılık gelen homogen

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \tag{2}$$

denkleminin lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümleri bulunur. Bu çözümlerin (a,b) de tanımlı oldukları açıktır. Buradan (2) nin genel çözümü

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

dir.

Şimdi (1) in (a,b) de tanımlı olan bir özel çözümü

$$y_p = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x) \tag{3}$$

dir; burada

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{array} \right. \tag{4}$$

dir. (4) den önce c_1' ve c_2' bulunur. Sonra integralleri alınarak $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ elde edilir. Bunların (3) de yerlerine yazılmasıyla verilen denklemin bir özel çözümü elde edilir. Not edelim ki burada ortaya çıkan integrasyon sabitleri yerine sıfır alınmaktadır.

Örnek 1.

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^{9/2}$$

denkleminin bir özel çözümünü bulunuz; burada karşılık gelen homogen denkleminin bağımsız çözümleri $y_1 = x$ ve $y_2 = x^2$ dir.

Çözüm

$$\begin{aligned} y_h &= c_1 x + c_2 x^2 \\ y_p &= c_1(x)\,x + c_2(x)\,x^2 \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} c_1' x + c_2' x^2 &= 0 \\ c_1'(1) + c_2'(2x) &= x^{5/2}. \end{aligned}$$

Bu sistemden $c_1' = x^{-5/2}$ ve $c_2' = x^{3/2}$ bulunur ve integral alınırsa

$$c_1 = \frac{-2}{7} x^{7/2} \text{ ve } c_2 = \frac{2}{5} x^{5/2}$$

elde edilir. Böylece verilen denklemin özel çözümü, c_1 ve c_2 nin yerlerine yazılmasıyla

$$y_p = \frac{4}{35} x^{9/2}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.

$$x^2 (1 - \ln x) y'' + xy' - y = \frac{(1 - \ln x)^2}{x}$$

denkleminin bir özel çözümünü bulunuz; burada $y_1 = x$ ve $y_2 = \ln x$ karşılık gelen homogen denklemin lineer bağımsız çözümleridir.

Çözüm

$$y_p = c_1 (x) x + c_2 (x) \ln x$$

olup, parametrelerin değişimi yönteminden

$$\begin{aligned} c_1' x + c_2' \ln x &= 0 \\ c_1' + c_2' \frac{1}{x} &= \frac{1 - \ln x}{x^3} \end{aligned}$$

sistemi elde edilir, buradan $c_1' = \dfrac{-\ln x}{x^3}$ ve $c_2' = \dfrac{1}{x^2}$ olup, integrallerinin alınmasıyla $c_1 = \dfrac{\ln x}{2x^2} + \dfrac{1}{4x^2}$ ve $c_2 = \dfrac{-1}{x}$ bulunur. Bu değerlerin yerlerine yazılmasıyla bir özel çözüm

$$y_p = \frac{1 - 2 \ln x}{4x}$$

şeklinde elde edilir.