Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümü İle Çözümü

Laplace dönüşümleri yardımıyla $n-$yinci basamaktan sabit katsayılı lineer bir diferensiyel denklem ve başlangıç koşullarından meydana gelen bir Cauchy probleminin çözümünü bulmak için aşağıdaki özelliğe ihtiyaç vardır.

Teorem 1. $f, f', ..., f^{(n-1)}$ fonksiyonları $[0, \infty)$ da sürekli ve α üstel basamaktan olsunlar. Ayrıca $f^{(n)}$ $[0, \infty)$ da parçalı sürekli olsun. Bu durumda $f, f', ..., f^{(n-1)}, f^{(n)}$ fonksiyonları $s > \alpha$ için Laplace dönüşümlerine sahip olup

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{1}$$

dir.

Özel olarak $n = 1$ için

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

ve $n = 2$ için

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

dır. Şimdi

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dx} + a_oy = b(x) \tag{2}$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemini

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1, ..., y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \tag{3}$$

başlangıç koşullarıyla birlikte ele alalım. $(2)-(3)$ problemini Laplace dönüşümleri yardımıyla çözmek için aşağıdaki adımlar izlenir:

(i) (1) özelliği ve (3) koşulları dikkate alınarak (2) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanır.

(ii) Elde edilen denklemde $Y(s)$ çözülür.

(iii) $(2)-(3)$ probleminin çözümü $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ dir.

Örnek 1. Laplace dönüşümlerini kullanarak

$$y'' - 6y' + 5y = 3e^{2x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3, \tag{4}$$

problemini çözünüz.

Çözüm. (4) deki denklemin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \frac{3}{s-2}$$

ve (1) özelliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3+(s-2)(2s-9)}{(s-2)(s-5)(s-1)} \\ &= -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-5} + \frac{5}{2}\frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa, (4) probleminin çözümü

$$y(x) = -e^{2x} + \frac{1}{2}e^{5x} + \frac{5}{2}e^{x}$$

bulunur.

Örnek 2. Laplace dönüşümlerini kullanarak

$$y'' + y = u(x-2),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \tag{5}$$

problemini çözünüz, burada $u(x-2)$ birim basamak fonksiyonudur.

Çözüm. (5) deki denklemin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanıp başlangıç koşulları göz önüne alınırsa,

$$s^2Y(s) - 1 + Y(s) = e^{-2s}\frac{1}{s}$$

ve buradan

$$Y(s) = e^{-2s}\frac{1}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$y(x) = (1-\cos x)u(x-2) + \sin x$$

bulunur, burada $\mathcal{L}\{u(x-c)g(x-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{g(x)\}$ özelliği kullanılmıştır.

Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Laplace Dönüşümü İle Çözümü

Sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemleri Laplace dönüşümü yardımıyla çözülürken Teorem 1 dikkate alınarak denklemlerin çözümünde izlenen yol uygulanır.

Örnek 3.

$$\begin{cases} y' + z' = 1, \\ y' - z = 0, \; y(0) = 0, \; z(0) = 1 \end{cases} \tag{6}$$

başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü yardımıyla çözünüz.

Çözüm. (6) sistemindeki denklemlerin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} sY(s) + sZ(s) - 1 &= \frac{1}{s} \\ sY(s) - Z(s) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

denklemleri elde edilir. $Y(s)$ ve $Z(s)$ in bilinmeyen olduğu (7) cebirsel denklem sistemi çözülürse,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} + \frac{1}{s^2+s}$$

ve

$$Z(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{s+1}$$

bulunur. Buradan verilen problemin çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} \\ &= -1 + x + e^{-x} + 1 - e^{-x} \\ &= x \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} z(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} \\ &= 1 - e^{-x} + e^{-x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.