KONU 13. UNİTER OPERATÖRLER VE UNİTER DENKLİK

Tanım 13.1. H bir Hilbert uzayı ve $U : H \to H$ bir operatör olmak üzere

$$U^* = U^{-1}$$

ise, U operatörüne H uzayında uniter operatör denir.

Teorem 13.2. Eğer U uniter operator ise

$$UU^* = U^*U = I$$

gerçeklenir.

İspat. Tanım 13.1 den kolayca elde edilir.

Tanım 13.3. $A, B : H \to H$ iki operatör ve $U : H \to H$ bir uniter operatör olmak üzere

$$A = UBU^{-1} \qquad (\text{veya } A = U^{-1}BU)$$

ise A ve B operatörlerine H Hilbert uzayında uniter denk operatörler denir ve $A \backsim B$ olarak gösterilir.

Teorem 13.4. $A \backsim B$ ise

a) $A^2 \backsim B^2$

b) $A^{-1} \backsim B^{-1}$

c) $R_\lambda(A) \backsim R_\lambda(B)$

olduğunu ispatlayınız.

İspat. a) $A \backsim B \Longrightarrow A = UBU^{-1} \Longrightarrow A^2 = \left(UBU^{-1}\right)^2 = UBU^{-1}UBU^{-1} = UB^2U^{-1} \Longrightarrow A^2 \backsim B^2$

b) $A \backsim B \Longrightarrow A = UBU^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = \left(UBU^{-1}\right)^{-1} = UB^{-1}U^{-1} \Longrightarrow A^{-1} \backsim B^{-1}$

c) $A \backsim B \Longrightarrow A = UBU^{-1} \Longrightarrow A - \lambda I = UBU^{-1} - \lambda I \Longrightarrow A - \lambda I = U(B - \lambda I)U^{-1} \Longrightarrow (A - \lambda I)^{-1} = U(B - \lambda I)^{-1}U^{-1} \Longrightarrow R_\lambda(A) \backsim R_\lambda(B)$

Teorem 13.5. $A \backsim B$ ise

a) $\rho(A) = \rho(B)$

b) $\sigma(A) = \sigma(B)$

c) $\sigma_d(A) = \sigma_d(B)$

d) $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$

olduğunu ispatlayınız.

İspat.

a) $R_\lambda(A) \backsim R_\lambda(B)$ olduğundan $\rho(A) = \rho(B)$

b) $\rho(A) = \rho(B) \Longrightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

c) ve **d)** de benzer şekilde ispatlanır.

Alıştırmalar.

1) $A^{-1} \backsim B^{-1}$ ise

a) $A \backsim B$

b) $R_\lambda(A) \backsim R_\lambda(B)$

c) $A^2 \backsim B^2$

d) $\rho(A) = \rho(B)$, $\sigma(A) = \sigma(B)$, $\sigma_d(A) = \sigma_d(B)$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$

olduğunu gösteriniz.

2) $U : H \to H$ uniter operatör ise

$$||U|| = 1$$

olduğunu ispatlayınız.