

KONU 5. ÖRNEKLER

Soru 5.1.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm. $f \in L_1(\mathbb{R})$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx = \int_{-1}^1 e^{-i\lambda x} dx \\ &= -\frac{1}{i\lambda} e^{-i\lambda x} \Big|_{x=-1}^1 = -\frac{1}{i\lambda} (e^{-i\lambda} - e^{i\lambda}) = \frac{2 \sin \lambda}{i\lambda} \end{aligned}$$

Soru 5.2. $f(x) = e^{-\gamma|x|}$, $\gamma > 0$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} \cos(\lambda x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} \sin(\lambda x) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \cos(\lambda x) dx = \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \frac{2\gamma^2}{\lambda^2} \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \cos(\lambda x) dx \end{aligned}$$

olup

$$g(\lambda) = \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \frac{\gamma^2}{\lambda^2} g(\lambda)$$

eşitliğinden

$$g(\lambda) = \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}$$

elde edilir.

Soru 5.3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$, $a > 0$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm.

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} e^{-i\lambda x} dx, \quad a > 0$$

integralini $\lambda > 0$ ve $\lambda < 0$ için rezidüler yardımı ile hesaplayarak

$$g(\lambda) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\lambda|}$$

bulunur.

Soru 5.4. $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{i\lambda}{2a})^2 - \frac{\lambda^2}{4a}} dx \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırmalar

1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesaplayınız.

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , \quad |x| \leq \pi \\ 0 & , \quad |x| > \pi \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.